UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR DE MATHEMATIQUES

Année 2005

Thèse

Pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de l' UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Par

Julie HOROKS

Date de soutenance : 27 janvier 2006

Les triangles semblables en classe de 2nde :

Des enseignements aux apprentissages

Etude de cas

Directeur de thèse

Aline ROBERT

Membres du Jury

Jean-Luc Dorier (rapporteur)
Christophe Hache
Colette Laborde (rapporteur)
Claire Margolinas
Marie-Jeanne Perrin
Aline Robert (directeur)
Janine Rogalski (invitée)

Remerciements

Les toutes premières personnes à remercier sont sans aucun doute les trois professeurs qui ont bien voulu me laisser filmer leurs cours, et sans lesquels il n'y aurait pas eu de recherche possible. Je remercie aussi Fabienne et Monique pour avoir choisi de prolonger mes observations et m'avoir offert de précieuses données supplémentaires.

Je remercie toute l'équipe DIDIREM - les plus ou moins jeunes chercheurs ! – dont je suis heureuse d'avoir fait partie pendant ma thèse. En particulier, Valentina pour sa passion des vieux manuels scolaires, Lalina pour tout ce qu'elle a à dire, Mariam pour ses conseils avisés sur SPAD, Fabrice pour sa bonne humeur et Christophe pour tout le reste.

Je remercie mes rapporteurs pour leur relecture éclairée, et surtout Jean Luc Dorier pour la richesse de ses remarques. Merci aussi à tous ceux qui ont prêté un œil ou une oreille attentive à mon travail, et lui ont permis de progresser.

Merci à mes amis qui ont suivi tout ça de près, et merci à ceux qui sont venus de loin.

Je dois enfin mille mercis à ma famille pour son soutien inconditionnel – malgré quelques petits moments de stress ! – et aussi à Antoine pour avoir été là juste quand il faut, juste comme il faut.

Mais s'il n'y avait qu'un seul remerciement à faire, il serait pour ma directrice de thèse Aline Robert, sans laquelle il n'y aurait pas eu de thèse – ni même d'ailleurs de DEA ! Je n'oublierai jamais les rendez-vous du dimanche, et même, je crois bien qu'ils vont me manquer cruellement.

Table des matières

Remerciements 3

Table des matières 5

Introduction 7

I) Questionnement, cadre théorique et problématique 11

1) Nos objectifs initiaux, (abandonnés rapidement en cours de route) ... 12

2) Un premier travail de recherche sur les cours particuliers ... 13

3) Les difficultés d'une telle recherche : public et privé sont opaques ... 14

4) Quelques changements de stratégie du chercheur : retour au public ... 15

5) Notre cadre théorique ... 17

6) Problématique : tâches, activités, contrôle sur les triangles semblables ... 24

II) Eléments de méthodologie : outils pour les analyses 29

1) Méthodologie pour l'analyse de la notion ... 30

2) Méthodologie pour l'analyse des tâches ... 32

3) Méthodologie pour l'analyse du déroulement ... 38

4) Méthodologie pour la comparaison avec les contrôles ... 47

5) Méthodologie pour l'analyse des exercices des manuels ... 53

6) Méthodologie pour l'analyse des pratiques et pour la comparaison entre les professeurs ... 53

7) Méthodologie pour la description raisonnée ... 55

8) Méthodologie pour l'utilisation de la vidéo dans l'analyse des pratiques : un outil récent en didactique ... 56

III) Analyse de la notion de triangles semblables et de triangles isométriques 59

1) Analyse épistémologique ... 60

2) Analyse des programmes scolaires ... 78

IV) Analyse détaillée des vidéos pour l'un des trois professeurs 97

1) Le choix de madame B ... 98

2) Les données recueillies en classe ... 98

3) Inventaire des tâches données en classe ... 100

4) Analyse a priori des tâches et activités mathématiques provoquées par les exercices donnés en classe ... 105

5) Description du déroulement ... 119

6) Analyse des tâches du contrôle et première comparaison avec les tâches et activités potentielles du cours ... 129

7) Les résultats des élèves au contrôle ... 134

8) Une première analyse des procédures des élèves et de leurs erreurs, en fonction de la connaissance nouvelle à appliquer dans le contrôle. 139
9) Conclusion 151
V) Comparaison entre les trois professeurs : variations et régularités 163
1) Nos analyses pour Mme P. 164
2) Nos analyses pour Mme F. 205
3) Comparaison des trois professeurs : Variations et régularités 227
4) Essai de caractérisation des stratégies des trois enseignants 237
5) Illustration : comparaison sur un exercice classique posé dans les trois classes 238
6) Ce qui pose problème aux élèves de ces trois classes 240
VI) Pour élargir encore : description raisonnée des séances sur le chapitre "triangles semblables" 243
1) Données recueillies et données exploitables 244
2) Analyse du système {contenu + déroulement} pour Mme S. et M. P. 244
3) Conclusion par rapport aux analyses précédentes 266
VII) Analyse des manuels scolaires 271
1) Les données recueillies 272
2) Le traitement du cours dans les manuels scolaires 273
3) Analyse des exercices des manuels : codage adopté et premiers résultats 276
4) Comparaison des exercices des manuels : histogrammes obtenus grâce aux tris à plat 281
5) Spécificité du travail proposé sur les triangles semblables 290
6) Le traitement des homologues dans les exercices 297
7) Analyse factorielle 302
8) L'outil triangles semblables 308
9) Conclusion 328
VIII) Conclusion, limites et perspectives 332
1) Les rapports entre enseignements et apprentissage 334
2) Le problème des homologues 337
3) La variété des pratiques sur les triangles semblables 341
4) Les limites de la recherche 343
5) Avancées et perspectives 344
BIBLIOGRAPHIE 347
ANNEXES 353

Introduction

Après une douzaine d'années de cours particuliers en mathématiques, dispensés à de nombreux élèves de tous niveaux scolaires, je me suis posé des questions sur l'apprentissage des élèves, et en particulier, je me suis demandé quelle était la nécessité pour eux d'avoir recours à un tel soutien. Pourquoi tous ces élèves avaient-ils besoin de prendre des cours en plus de ceux qu'ils suivent au collège ou au lycée ? Faut-il aller chercher du côté de la classe, ce qui a pu leur manquer dans les cours dispensés par leur professeur de mathématiques, et qui aurait permis que certains apprentissages se fassent ? Leur travail personnel est certainement aussi à mettre en cause, mais que leur donne-t-on à faire à la maison, et comment apprennent-ils à travailler seuls et correctement ? En particulier – et c'est à cette occasion que beaucoup d'élèves se décident à prendre des cours de soutien – comment préparent-ils les contrôles ? Comment expliquer la nécessité de cette aide, devenue si courante en mathématique pour éviter l'échec aux évaluations ?

Bien entendu, les mathématiques ont pris une place souvent centrale dans la scolarité des élèves et jouent un rôle décisif dans leur orientation. Même si elles perdent aujourd'hui de leur "aura", il vaut mieux être bon en maths que mauvais, c'est une évidence ! Mais est-ce suffisant pour expliquer plus généralement la recrudescence des « boîtes de cours » qui n'ont cessé de prospérer et de se multiplier ces dernières années ?

Le phénomène des cours particuliers n'est pas passé inaperçu et a été relayé par plusieurs magazines de société, qui se sont récemment penchés sur la question, et le font encore régulièrement, révélant des chiffres plutôt importants :

- le Monde (7 avril 2000 & 11 mars 2003) :

  "un marché de plusieurs millions d'heures en 1998";

  "des chiffres qui ont incité le ministère de l'éducation nationale à envisager une aide individualisée pour les jeunes en difficulté au lycée";

- le Figaro (25 septembre 2002)

  "depuis quelques années, la demande gagne l'école primaire";

"Chaque année, les parents dépensent plus de 1.5 milliards d'euros en "petits cours" et diverses formules de soutien scolaire pour leurs enfants" (450 millions d'euros rien que pour l'Ile de France);

- le Nouvel Observateur (28 mars 2002 & 26 octobre 2002)

  "La proportion de collégiens, et même d'écoliers, augmente. Et puis socialement : les classes moyennes sont de plus en plus demandeuses";

  "Si les élèves moyens (et pas ceux qui sont en très grande difficulté, pris en charge par l'éducation nationale) constituent le gros des troupes, toutes les officines de soutien ont dans leur clientèle une proportion stupéfiante de bons élèves, 30 à 50% suivant les cas".

Parallèlement, les sites Internet proposant des cours de soutien pullulent, et parmi eux, nombreux sont ceux qui communiquent plus particulièrement sur les mathématiques :

Prépamath, Association Mathématiques, Association Maths –Vacances, Math – Assistance, Aidéquation, Point Math, Math Succès, Math Services, Maths Melisso, Objectifs Maths ...

Certes, toutes ces informations ce ne sont pas propres aux cours de mathématiques, et pour avoir une idée plus précise de ce qu'était la part des mathématiques dans ce phénomène, nous avons voulu interroger des étudiants de DEUG, dans plusieurs matières et différentes universités, sur leur "consommation" passée en cours particuliers de mathématiques. Nous n'avons pas interrogé assez d'étudiants pour obtenir des chiffres probants, mais sur les quelques centaines qui ont bien voulu remplir notre questionnaire[1], environ 50% avaient déjà eu recours au moins une fois dans leur scolarité à un soutien en mathématiques, et parmi les étudiants de l'autre moitié, une grande majorité avait dans leur famille quelqu'un qui, ayant fait des études scientifiques poussées, avait pu leur venir en aide. Autre chiffre intéressant, le pourcentage d'étudiants ayant déjà donné des cours particuliers en mathématiques, qui s'élevait à 23% !

Ces chiffres rendent le phénomène rien moins qu'anecdotique, et soulèvent de nombreuses questions. Nous pouvons nous demander tout d'abord qui prend des cours, et pourquoi. Il semblerait que ce ne sont plus uniquement les mauvais élèves qui y ont recours,

[1] Voir ANNEXES : questionnaire DEUG

mais aussi des élèves de bon niveau. La réussite en mathématique n'a-t-elle donc pas de prix ? Cela nous amène à nous interroger sur les raisons de cette demande importante. Qu'est-ce qui explique le besoin des élèves de prendre des cours en plus ? Est-ce pour être le meilleur ou pour ne pas être trop mauvais ? Est-ce que par ailleurs ces cours remettraient en cause le bon fonctionnement de l'enseignement dispensé en classe ?

Il existe très certainement une dimension sociale à ce problème, que nous avons choisi de ne pas prendre en compte, bien qu'ayant conscience que cela a une influence sur les motivations des élèves et de leur famille. Les cours particuliers constituent une sorte de béquille qui devrait rester provisoire, et qui rassure les parents sur l'avenir de leur enfant et leur capacité à suivre une scolarité "normale". Nous nous limiterons ici a priori à l'aspect cognitif lié à ce besoin de soutien scolaire en mathématiques, et essaierons d'analyser les raisons de cette demande à partir des apprentissages visés par les enseignants, et de ce qui est fait ou non en classe pour les atteindre.

Ce phénomène nous a paru assez important pour que nous nous y attardions, même s'il ne relevait pas au premier abord des questions traditionnelles de la didactique des mathématiques, en ce qu'il ne s'intéresse a priori pas à ce qui se passe en classe. Mais c'est justement du côté de la classe que nous avons décidé d'aller chercher des réponses à nos questions, pour comprendre ce qui avait pu éventuellement "manquer" à certains élèves pour que les apprentissages visés chez eux aient bien lieu, et qui les avait poussés à prendre des cours particuliers.

I) Questionnement, cadre théorique et problématique

Nous allons donner dans ce chapitre les éléments de notre questionnement de départ, qui nous ont lancés sur cette recherche, et la manière dont ils nous ont conduit à mener nos observations, à choisir notre cadre théorique et à reformuler les questions que nous nous posions.

1) Nos objectifs initiaux, (abandonnés rapidement en cours de route) 12

2) Un premier travail de recherche sur les cours particuliers 13

3) Les difficultés d'une telle recherche : public et privé sont opaques 14

4) Quelques changements de stratégie du chercheur : retour au public 15

5) Notre cadre théorique 17

a) Des tâches proposées aux activités des élèves 17
b) Des activités aux apprentissages des élèves 18
c) A propos des pratiques 20

6) Problématique : tâches, activités, contrôle sur les triangles semblables 24

a) La notion en jeu 26
b) La séquence précise 27
c) La mise en relation avec le contrôle 28

1) Nos objectifs initiaux, (abandonnés rapidement en cours de route)

Dans cette recherche, nous nous intéressons aux apprentissages des élèves en mathématiques, mais aussi aux pratiques enseignantes qui sont, en grande partie, à l'origine de ces apprentissages, notamment par le biais de ce qui se passe en classe.

Nous voulons déterminer dans la mesure du possible ce que les élèves ont appris et retenu d'une notion enseignée en classe, et ce qu'ils pourront mettre en œuvre par la suite sur et avec cette notion. Plus précisément, pour savoir ce qui a été appris, nous allons nous intéresser à ce qui ne l'a manifestement pas été – ou en tout cas pas suffisamment – à la fin d'un chapitre du cours. Nous tentons donc de repérer les problèmes qu'ont pu rencontrer les élèves au cours de leur apprentissage, et de déterminer à quoi ces problèmes sont reliés.

Pour essayer de connaître les difficultés qu'ont pu rencontrer les élèves, suite aux cours de mathématique sur une notion donnée, nous avions choisi d'analyser les demandes de certains d'entre eux en cours particulier. A travers leurs demandes, en effet, nous pouvons déterminer ce qu'ils pensent ne pas avoir compris, et par des exercices d'entraînement ou d'approfondissement, nous pouvons mesurer assez rapidement s'ils savent utiliser cette notion. Nous pouvons tester facilement certaines de leurs connaissances : ont-ils retenu les définitions, savent-ils appliquer telle propriété du cours, peuvent-ils reconnaître la notion nouvelle à utiliser dans un exercice plus ou moins complexe ?

De plus, pour comprendre comment les difficultés des élèves peuvent être reliées à ce qui a été fait en classe, il nous faut connaître aussi les contenus des séances du cours, c'est à dire tout ce qui a été fait par le professeur et les élèves sur cette notion : les définitions et propriétés introduites par le professeur et les exercices proposés. Nous voulons aussi connaître les déroulements précis de ces séances, car la manière dont cet enseignement a été dispensé nous paraît être un élément fondamental pour approcher l'apprentissage des élèves. On peut penser en effet que la façon dont a été organisé le cours joue un rôle important dans la façon dont il a pu être perçu par les élèves. Par exemple, si une propriété est peu travaillée ou à travers des exercices peu variés, on peut se demander quelle influence cela va avoir sur la capacité des élèves à résoudre des exercices plus complexes mettant en œuvre cette même notion.

Pour pouvoir répondre à nos questions, nous avons ainsi voulu suivre quelques élèves à travers des séances de mathématiques dans leur classe, sur une même notion, puis pendant les cours particuliers qui suivaient ces séances, afin de comprendre les demandes de ces élèves, et de les mettre en regard de ce qui avait été fait ou non auparavant en cours. Nous voulons ainsi caractériser éventuellement des "manques" pour les élèves en question : comprendre ce qui n'avait pas été fait en classe et qui aurait pu faciliter un apprentissage individuel.

2) Un premier travail de recherche sur les cours particuliers

Toutes les particularités liées à la situation privilégiée des cours individuels expliquent peut-être en partie leur efficacité, ou du moins leur popularité auprès de ceux qui y ont recours. Mais à l'origine de ce succès, il y a aussi une stratégie didactique d'apprentissage liée au cours particulier de mathématique. C'est ce que nous avions mis en évidence dans une première recherche (Horoks, 2002) qui avait pour but d'analyser les déroulements de quelques cours particuliers afin de mieux comprendre ce qui en faisait la relative efficacité.

Nous nous étions appuyé sur les travaux de Vygotski (1934, 1978) non pas dans le cadre mathématique ni même scolaire, mais dans celui du développement de l'enfant. Il considère très schématiquement que l'apprentissage comporte deux phases : l'apparition de nouvelles structures et le perfectionnement des anciennes. Le niveau présent du développement de l'enfant correspond aux éléments qui sont chez lui au stade de maturation.

Vygotski émet l'hypothèse de l'existence d'une zone proximale de développement (ZPD) qui caractériserait chez un individu, son niveau de développement actuel et ses possibilités d'apprentissage d'une connaissance donnée, à travers des interactions éventuelles avec un tiers, enseignant ou autre. Grâce à cette collaboration en effet, l'enfant pourra résoudre des problèmes qu'il n'aurait pas su résoudre seul. L'enfant est capable d'imiter ce qui est déjà dans son stade de connaissance, et à l'aide d'un tiers il est capable d'imiter ce qui est suffisamment proche de ce stade. Ainsi s'il y a imitation possible, il y a apprentissage possible. Vygotski suggère de ce fait l'analyse de l'aide apportée par ce tiers dans l'apprentissage de l'élève.

La théorie de Vygotski nous paraissait convenir à une analyse de séance de cours particulier, dans la mesure où celui-ci est justement constitué d'une suite d'interactions entre deux individus, professeur et élève, et que l'échange a pour but l'apprentissage d'une ou plusieurs connaissances données.

Schématiquement, tout se passe comme si le professeur mettait en évidence, pendant le cours particulier, pour une notion précise et à un moment donné, la ZPD de l'élève. Pour peu qu'il sache définir le niveau de connaissances de l'élève, en se plaçant "juste au-dessus", le professeur lui permet ainsi l'apprentissage de notions nouvelles. Le cours particulier tel que nous l'avons modélisé se déroule alors en deux temps importants : le repérage de la ZPD de l'élève sur une notion donnée, puis l'utilisation du niveau de connaissances de l'élève pour la résolution des tâches successives, avec éventuellement une démarche en sens inverse, un retour à des tâches plus compliquées, lorsque le niveau de l'élève est suffisant pour l'envisager

D'après nos analyses, cette méthode permet visiblement un travail effectif de l'élève, et selon le modèle de Vygotski, peut mener à un apprentissage des notions étudiées, mais la simple observation de trois séances de cours particuliers ne nous permettait pas de démontrer un bénéfice à plus ou moins long terme pour chaque élève. Nous ne savons donc pas dans quelle mesure il y a eu apprentissage, ni même si cet apprentissage aura eu lieu ; tout au plus, peut-on espérer avoir transmis à l'élève une méthode de travail plus efficace. C'est en considérant les résultats de ces élèves en classe qu'on aurait pu avoir une réponse partielle à cette question, ce qui n'a pas été le cas dans cette recherche. La variété des contenus mathématiques étudiés par les trois élèves au cours de ces séances limitait aussi la recherche. Ce modèle didactique d'apprentissage est-il toujours valable quelle que soit la notion ?

Cette première recherche nous a donné quelques pistes à poursuivre ; nous voulions entre autre comparer les pratiques en classe et en cours particuliers de différents professeurs, afin de comprendre la spécificité de chacune et de pousser plus loin la question de l'efficacité des aides individuelles.

3) Les difficultés d'une telle recherche : public et privé sont opaques

Il n'est pas très facile de trouver des professeurs qui soient d'accord pour nous ouvrir les portes de leur classe pendant plusieurs semaines, encore moins de trouver dans leurs classes des élèves qui admettent prendre des cours particuliers et qui acceptent de nous laisser les enregistrer. Nous avons tout de même trouvé deux terrains d'observation : deux professeurs - l'un dans une classe de 3ème sur le chapitre "systèmes" et l'autre dans une classe de 2nde sur le chapitre "triangles semblables" - qui nous permettaient de suivre ainsi six élèves en classe puis en cours particulier, avec 5 tuteurs différents. Nous ne remercierons jamais assez ces deux professeurs pour leur "hospitalité" !

Malheureusement pour nous, le cours particulier, malgré son succès croissant, reste encore un sujet "tabou" chez la plupart des professeurs et des élèves. Les premiers déplorent le côté "antidémocratique" de ce système de cours et craignent peut-être aussi que leur enseignement ne soit critiqué : remis en question par la nécessité pour les élèves d'"aller voir ailleurs". Les seconds ont peur que leurs progrès éventuels ne soient dévalorisés s'il s'avère qu'ils les doivent à un soutien extérieur. Quant aux professeurs particuliers, ils pourraient avoir peur que l'on discute leur légitimité à enseigner, peur partagée par certains organismes qui les emploient sans les former.

Aussi, nous avons eu beaucoup de mal à accéder aux données dont nous avions besoin pour tenter de répondre à nos questions. Les enregistrements en classe ont bien eu lieu, mais aucun des professeurs particuliers n'a réalisé les enregistrements demandés – malgré un accord préalable et sous des prétextes pas toujours très convaincants - rendant ainsi impossible la comparaison envisagée.

Cependant, les informations que nous avons recueillies étaient tout de même d'une grande richesse : nous disposions de l'intégralité des séances en classe sur une notion donnée, et d'une ou plusieurs productions de chacun des élèves, ce qui représente pour nous un corpus passionnant.

4) Quelques changements de stratégie du chercheur : retour au public

Il nous fallait alors trouver un autre biais pour connaître les difficultés des élèves et pour tester leurs connaissances à l'issue d'un chapitre. Il nous a paru intéressant d'utiliser comme témoin le contrôle final donné par le professeur. Comme nous l'avons déjà signalé, les contrôles plus ou moins "ratés" sont souvent à l'origine des demandes de cours particuliers ; ils participent au désarroi de certains élèves ou de leur famille. Les réponses des élèves à un contrôle constituent une information valide sur l'état de leurs apprentissages, même s'il faut rester très prudent dans l'interprétation des résultats, bons ou mauvais. En effet, un élève lent aura peut-être compris la notion en jeu, et serait peut-être capable de répondre à toutes les questions du contrôle, sans pour autant avoir eu le temps de tout écrire sur sa copie. A l'inverse, un élève plus médiocre n'est jamais à l'abri d'un coup de chance !

Malgré le caractère partiel de ces informations, nous avons jugé que le contrôle final pourrait constituer – au moins sur certains chapitres – un moyen intéressant de connaître certaines difficultés des élèves liées aux apprentissages visés, et d'essayer de les mettre en relation avec le cours. Nous discuterons par la suite la validité d'une telle hypothèse.

Nous avons donc décidé de continuer nos observations dans d'autres classes, mais lors de séances portant sur une même notion, et, au vu de nos premiers résultats, d'affiner nos analyses.

A ce stade de notre travail, il nous a paru raisonnable de penser que ce qui a été fait par les élèves lors des années précédentes, avec différents professeurs, en cours de mathématiques - voire dans d'autres matières - va aussi jouer un rôle dans la constitution de leurs connaissances nouvelles. Si on choisit par exemple de se pencher sur l'apprentissage des élèves sur la notion d'équation du second degré en classe de 1ère S, il faut prendre en compte, lorsqu'on veut évaluer l'étendue de leurs connaissances et déterminer les causes de leurs difficultés éventuelles, les problèmes rencontrés lors des années précédentes, liés, par exemple, à l'écriture littérale abordée en classe de 5ème, ou bien aux opérations algébriques, à la factorisation ou à la résolution d'équations du 1er degré travaillées tout au long du collège, ou encore aux prémices de l'étude de fonctions en classe de 2nde, et, pourquoi pas, à la manipulation d'équations littérales en physique et en chimie… Cela représente pour nous trop de zones d'ombre, qu'il nous est difficile d'éclairer, et encore plus évidemment pour chaque élève.

C'est pourquoi il nous a fallu choisir une notion sur laquelle les élèves n'avaient pas – ou peu – de connaissances antérieures, et qu'ils découvraient lors des séances que nous avons choisi d'observer. Nous limitons ainsi un peu les facteurs extérieurs hors de notre portée, tout en restant conscients que les connaissances anciennes des élèves restent un élément important, à prendre en compte systématiquement dans notre travail d'analyse.

Nous avons alors choisi de travailler sur les triangles semblables, chapitre du programme de seconde – observé dans l'une de nos deux premières classes. Il s'agit d'un chapitre assez court, ce qui rendait raisonnable une observation exhaustive. Ce chapitre n'est, de plus, pas repris par la suite au lycée, et il repose essentiellement, en plus de la notion nouvelle, sur certaines connaissances de géométrie du collège. Nous discuterons plus loin le choix de cette notion, en analysant de manière plus poussée ses origines mathématiques, ainsi que sa place et son évolution dans les programmes scolaires.

Nous avons alors trouvé deux autres professeurs de 2nde qui voulaient bien nous laisser observer l'intégralité de leur cours sur les triangles semblables et relever les copies des élèves au contrôle final, ce qui nous a permis par la suite de compléter nos données.

Cela nous a permis malgré tout de réaliser une analyse poussée – même si elle reste clinique, en ce qu'elle se limite à une étude de cas – des relations entre les enseignements en classe et leurs effets sur les apprentissages des élèves, sur cette notion et par l'intermédiaire des contrôles.

5) Notre cadre théorique

Pour répondre aux questions que nous nous posons sur les difficultés des élèves, nous voulons étudier les séances de cours de mathématiques d'un point de vue didactique, c'est à dire en analysant les relations entre apprentissages et enseignements.

a) Des tâches proposées aux activités des élèves

Du côté des enseignements, nous ne savons pas exactement quel sera le déclencheur des apprentissages parmi tout ce qui constitue le cours. Nous nous appuyons cependant sur l'hypothèse didactique que les apprentissages éventuels se font bien, au moins en partie, par l'intermédiaire des activités de l'élève provoquées en classe, c'est à dire tout ce que celui-ci pense, dit, écrit, ou au contraire tout ce qu'il ne fait pas.

Cependant, nous n'avons pas accès directement aux activités des élèves à l'origine d'apprentissages éventuels, car nous ne pouvons évidemment pas savoir ce que chacun d'eux pense au fur et à mesure du cours. Nous ne savons même pas ce que chacun d'eux fait, minute après minute, pendant chaque séance. Ce serait, en effet, un corpus très intéressant, mais très fastidieux à constituer ! A travers nos observations, nous pouvons tout de même avoir un accès partiel aux activités potentielles[2] des élèves (Robert, 2001), c'est à dire ce qu'ils peuvent faire suite à ce que propose le professeur. Par exemple, si le professeur donne un exercice qui consiste à appliquer une définition, nous considérerons que les élèves auront eu l'opportunité d'appliquer cette définition, et qu'il y aura eu, potentiellement, une activité des élèves sur cette définition. Ce sont ces activités, à l'origine des apprentissages, que nous analysons, et dont nous jugeons les effets, par l'intermédiaire des contrôles.

Pour réaliser nos analyses, nous partons du principe que ces activités sont provoquées chez les élèves par les tâches[3] que propose l'enseignant, c'est à dire l'ensemble de ce que les élèves doivent faire pendant le cours, ou en devoir à la maison. Lorsque la résolution des exercices proposés par le professeur a lieu en classe, nous nous intéressons à la manière dont ces

[2] **Attention**, nous n'entendons pas" *activités potentielles"* au sens de Vygotski, c'est-à-dire potentiellement réalisables avec l'aide d'un tiers, mais plutôt comme tout ce qui a pu être fait par certains élèves de la classe, suite aux propositions de l'enseignant.
[3] Définies mathématiquement.

tâches se déroulent, car nous considérons que le déroulement de ces tâches peut modifier la nature de ce qui est demandé initialement aux élèves. Par exemple, si le professeur donne un exercice dans lequel il faut d'abord reconnaître la propriété avant de l'appliquer correctement, il n'est pas équivalent pour nous de considérer une séance pendant laquelle le professeur fait chercher les élèves – leur laissant alors l'initiative de retrouver la bonne propriété à appliquer – et une autre au cours de laquelle le professeur signalerait d'une façon ou d'une autre la propriété à utiliser, les élèves n'ayant alors qu'à l'appliquer dans un cas particulier.

Dans ce type d'analyse, nous ne pouvons pas nous intéresser à chaque élève en particulier, car cela nécessiterait une observation beaucoup plus lourde. Nous considérerons cependant des tâches *a maxima* et *a minima*, en tenant compte de ce qu'un élève peut faire s'il profite des temps de silence du professeur pour chercher seul les exercices posés ; et de ce qu'un autre au contraire ne fera pas seul, s'il attend les indications du professeur pour se mettre au travail.

Nous analysons les tâches proposées, ainsi que les accompagnements du professeur, c'est à dire plus particulièrement la manière dont il intervient avant, pendant et après l'activité dans laquelle il engage les élèves, en regardant par exemple, les aides qu'il dispense pendant l'activité, les diagnostics qu'il réalise, les corrections d'exercices qu'il organise. Nous tenons compte des types de travail proposés, individuel ou en groupe, ou encore sous forme de cours magistral. Nous distinguons ainsi les activités qui comportent un temps de recherche seul, ou celles qui se font en étroite collaboration avec le professeur ou les autres élèves.

Cela nous permet de tenir compte du choix des tâches proposées, mais aussi de l'évolution de ces tâches en classe. En général, par ses diverses interventions, le professeur "modifie" régulièrement et de différentes manières ce qui est donné à faire aux élèves, il réalise souvent un découpage de la tâche initiale en plusieurs sous-tâches. Cette analyse fine nous permet de comprendre, par exemple, quelles autonomies et initiatives ont été réellement laissées aux élèves, et ce qui n’a été pris en charge que par le professeur. Nous considérons que tous ces éléments sont des facteurs décisifs pour les apprentissages ultérieurs, dans le cadre choisi.

b) Des activités aux apprentissages des élèves

Nous faisons l'hypothèse que les différents types d'activités provoquées en classe par le professeur favorisent la conceptualisation, par les élèves, des notions visées. Nous définissons, dans le chapitre suivant, la nature des différents énoncés possibles portant sur les triangles semblables et les activités qui peuvent en découler. Nous analysons le travail fait en classe sur chacune des propriétés nouvelles du cours, afin d'essayer d'en déterminer les conséquences éventuelles sur les apprentissages des élèves.

Cependant, les analyses conjointes des tâches et des déroulements ne nous renseignent pas sur les apprentissages des élèves. Nous ne savons pas ce qui a été appris dans la classe à l'issue d'une séance, à l'issue du chapitre, et encore moins ce qui sera su par chaque élève à plus long terme.

Pour nous, l'un des indices de conceptualisation par les élèves des propriétés enseignées est la disponibilité de ces notions, c'est-à-dire concrètement, l'aptitude des élèves à les mettre en fonctionnement dans des contextes différents et avec des adaptations variées, y compris sans indication. Pour vérifier cette hypothèse, il nous faut tester les connaissances des élèves. C'est à cet effet que nous avons choisi de relever, pour chaque élève, les contrôles donnés en classe, portant sur la notion qui nous intéresse, et que nous regardons comme indicateurs d'apprentissage. Nous discuterons évidemment la validité d'une telle hypothèse.

Lors du contrôle, l'élève est seul devant sa copie. Les aides dont il a pu bénéficier lors des séances d'exercices en classe ne sont généralement plus dispensées pendant l'examen. Nous voulons alors vérifier si chaque élève saura mobiliser les connaissances en jeu, et prendre les initiatives nécessaires à la résolution de la tâche mathématique demandée, même s'il n'en a pas eu la charge en classe.

Pour ne pas perturber plus les professeurs qui nous ont accueillis, et pour des raisons de temps, nous avons choisi de leur laisser entièrement le choix des énoncés du contrôle. Nous verrons que cette décision ne nous permet pas toujours de tirer des conclusions sur le rapport entre le travail en classe et les apprentissages des élèves. De plus, il reste à mettre en évidence la relation entre l'apprentissage des élèves et leur réussite au contrôle. Nous discuterons la validité de ces choix dans notre chapitre de conclusion.

Contrairement à la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), nos analyses a priori ne tiennent pas du tout compte du déroulement, mais uniquement des tâches prescrites et des activités mathématiques correspondantes attendues des élèves. Cela nous permet d'étudier les déroulements par comparaison et de mieux cerner les activités possibles des élèves, en prenant en compte la redéfinition éventuelle des tâches proposées par les professeurs.

c) A propos des pratiques

Pour mieux cerner les activités des élèves en classe – en particulier pour comprendre les choix qui ont motivé l'organisation de ces activités, ou leur durée – nous analysons les pratiques des professeurs, qui ont participé à les provoquer. Pour ce faire, nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les propositions faites aux élèves ne sont pas uniquement dictées par les apprentissages ; elles sont aussi fortement influencées par diverses contraintes liées au *métier* d'enseignant. Ces analyses nous permettent alors d'éclairer certaines conditions des choix de gestion faits par les professeurs, qui ne sont pas liés aux mathématiques enseignées. Ces analyses, de ce point de vue, permettent aussi de pondérer nos observations, et d'intégrer dans le temps long ce qui n'est observable pour nous, qu'à l'échelle de quelques séances.

Les pratiques enseignantes peuvent être caractérisées par plusieurs composantes, que nous allons détailler maintenant.

Les deux premières composantes, sont caractérisées par les éléments dont nous avons déjà parlé plus haut : par le choix des énoncés donnés aux élèves – *composante cognitive* – et par les choix de gestions correspondants en classe – *composante médiative* des pratiques du professeur.

Nous considérons une autre composante, qui est la *composante sociale*, liée à l'établissement et à la classe dans laquelle enseigne le professeur. On peut penser que les choix de celui-ci ne seront pas les mêmes suivant que l'établissement dans lequel il enseigne est un lycée "élitiste"[4] ou bien un établissement dit "difficile". De la même façon, l'opinion qu'il aura sur sa classe va jouer un rôle dans ses prises de décision ; s'il considère que le niveau de ses élèves est faible, ou du moins plus faible que celui des élèves de l'année précédente, il leur proposera peut-être des exercices plus simples en classe et en contrôle, pour permettre à la classe dans son ensemble de suivre les cours.

Notre travail ne pourra se placer qu'à l'intérieur de ce cadre et nous empêchera peut-être de répondre à certaines questions.

Une quatrième composante est la *composante institutionnelle*, liée aux programmes scolaires et aux horaires en mathématiques. Ceux-ci définissent de manière plus ou moins précise les notions à enseigner aux élèves, le temps moyen à passer sur chacune d'entre elles compte tenu du temps total disponible, et les "capacités attendues"[5] des élèves en fin d'année, à l'issue de chaque chapitre. Les différents manuels scolaires reflètent aussi les instructions du programme,

[4] Un de ces établissements dont la renommée n'est plus à faire et qui recrutent uniquement les bons élèves des autres lycées, au dossier scolaire irréprochable.
[5] "capacités attendues" est l'expression utilisée par les programmes officiels

et sont souvent utilisés par les professeurs[6] pour y puiser des exercices ou des activités d'introduction. Les professeurs sont libres cependant de choisir l'ordre dans lequel ils vont enseigner les différentes notions du programme, mais ils sont tenus de les enseigner toutes. Les connaissances de leurs élèves sont testées régulièrement par des contrôles communs – dans le cadre de l'établissement - ou des évaluations nationales.

La dernière composante importante est la *composante personnelle*, liée à l'expérience de la classe et aux conceptions qu'a pu construire l'enseignant sur son métier. Les choix d'un professeur débutant et d'un professeur expérimenté ne sont pas les mêmes, on peut supposer aussi que les différentes formations qu'ils ont pu suivre et les différents établissements dans lesquels ils ont été affectés vont jouer un rôle dans leur conception du métier, et dans ce qu'ils proposent aux élèves

Ces différentes dimensions rentrent en jeu et influent sur les choix individuels des pratiques en classe (Robert & Rogalski 2002), aussi, nous considérons que chacune doit être prise en compte autant que possible dans l'analyse que nous faisons.

Par exemple, pour tenir compte tout particulièrement de la composante institutionnelle, et parce que le chapitre qui nous intéresse était (ré)apparu très récemment dans les programmes scolaires, une analyse de la notion de triangles semblables nous a paru importante. Celle-ci devrait nous permettre de compléter la palette des possibilités d'enseignement qui s'offrent aux professeurs, et de mieux comprendre comment leurs choix s'y inscrivent. Il est intéressant de dégager le type de notion que représentent les triangles semblables : à quelles autres notions mathématiques cette notion est-elle rattachée, et donc à quelles autres parties des programmes ? Est-ce un outil utile aux élèves pour réaliser d'autres tâches mathématiques ?

Les réponses à ces questions expliquent en partie la place que prend ce chapitre dans le programme de la classe de 2$^{\text{nde}}$, et la manière dont les programmes des années précédentes et suivantes y font ou non référence. Pour la même raison, nous avons jugé nécessaire de regarder ce qu'on pouvait trouver dans les manuels de 2$^{\text{nde}}$ sur ce chapitre. Les approches qui s'y trouvent reflètent-elles les choix des professeurs observés ? Les exercices qui y sont proposés présentent-ils les mêmes manques éventuels que ceux repérés en classe ?

Compte tenu des données de notre recherche qui sont propres à chaque professeur, et qui ont trait aux composantes sociales et personnelles de leur métier, et pour palier au fait que nous

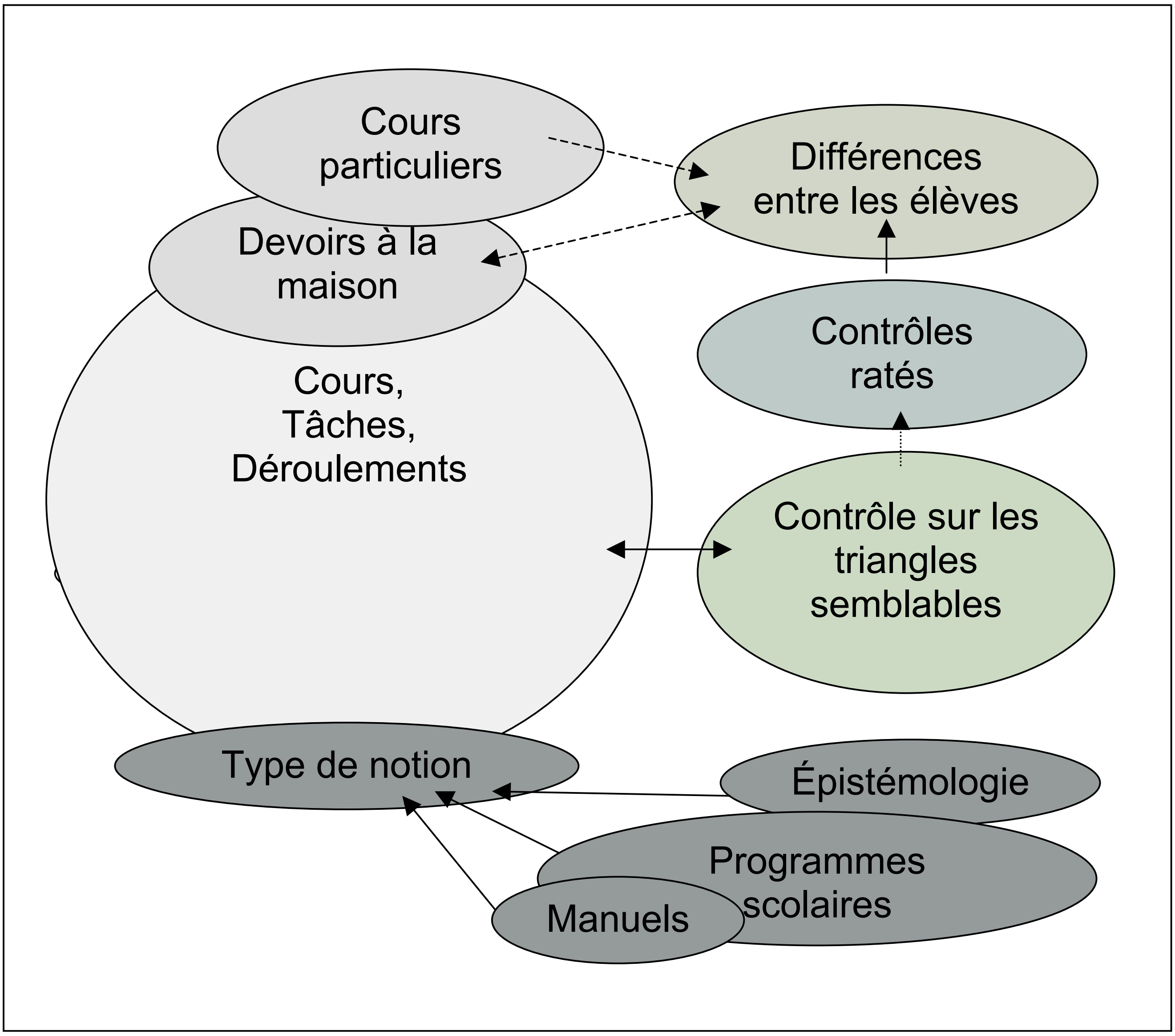
[6] Les maisons d'édition envoient aux professeurs les nouveaux manuels lorsque les programmes scolaires changent, afin de leur permettre de faire leur choix.

étions limités par une observation des pratiques sur un temps relativement court, nous n'avons pas voulu nous contenter de l'observation d'une seule classe. Nos analyses auraient alors été limitées par diverses variables, telles que le niveau des élèves dans un établissement trop élitiste, par exemple, ou l'inexpérience d'un professeur débutant. Ainsi, une étude comparative de plusieurs enseignants sur une même notion s'imposait. Elle nous permet de mieux cerner la diversité des choix, compte tenu des programmes qui sont les mêmes pour tous, mais aussi du niveau des établissements et de l'expérience personnelle des professeurs observés. Cette comparaison nous permettra, si plusieurs de nos observations s'y prêtent[7], de discuter les effets éventuels sur les apprentissages de gestions différentes du travail des élèves, et d'en tirer des conclusions un peu plus étendues.

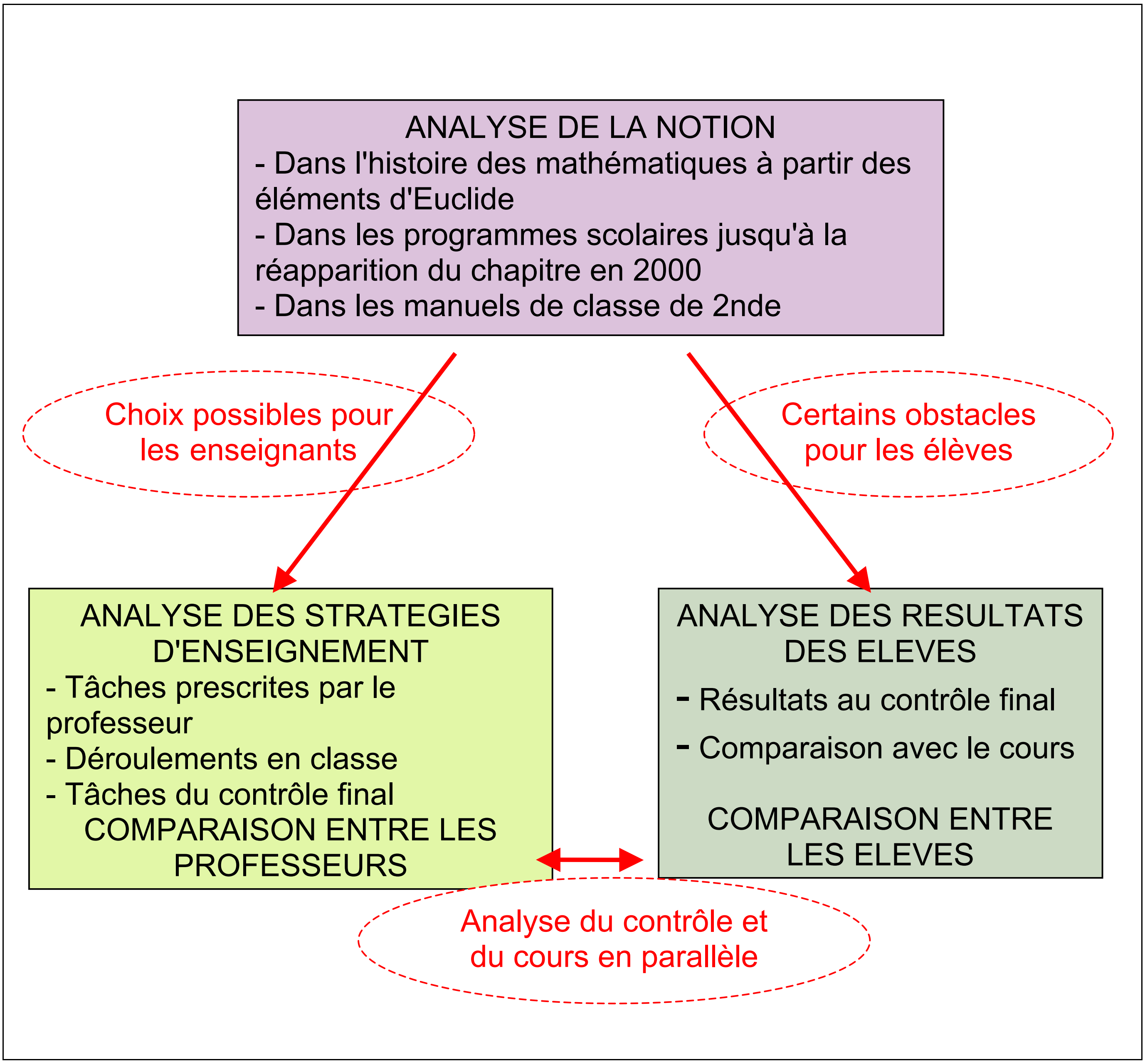
Dans ce but, nous avons réalisé trois analyses de vidéos sur le chapitre des triangles semblables, avec des professeurs aux parcours divers, enseignant dans des établissements différents.

[7] On ne peut comparer que ce qui est comparable !

Voici deux schémas qui résument l'organisation de notre travail. Le premier montre comment les différents éléments que nous avons choisis de prendre en compte motivent nos questions, comment ils s'articulent et participent à notre recherche.



Le second schéma explique les différentes analyses auxquelles nous allons procéder.



6) Problématique : tâches, activités, contrôle sur les triangles semblables

Afin de mieux comprendre les difficultés des élèves – mais sans chercher à rentrer dans des problèmes singuliers – nous nous intéressons aux relations entre les pratiques d'un professeur de mathématiques et les activités des élèves de sa classe sur les triangles semblables, avec en point de mire les apprentissages qui en découlent éventuellement. Pour ce faire, nous analysons en détail les déroulements - c'est à dire les contenus enseignés ainsi que les accompagnements du professeur - et les résultats des élèves à un contrôle final.

Plus particulièrement, nous nous demandons quelles relations peuvent exister entre la réussite ou l'échec des élèves au contrôle et l'organisation par le professeur de l'apprentissage de la notion sur laquelle il porte. Nous nous demandons dans quelle mesure la variabilité des pratiques de l'enseignant peut influencer les apprentissages des élèves. Serait-il possible, par exemple, que les tâches effectuées par les élèves, en classe, dans certaines conditions jugées optimales favorisent un apprentissage de la notion par une majorité d'élèves ?

Nous nous appuyons sur l'hypothèse "extrême" que ce qui n'a pas été travaillé effectivement en classe ne sera peut-être pas appris par certains élèves. Nous mettons ici cette hypothèse en discussion et tentons de la vérifier grâce à nos résultats. Si, lors de la résolution d'une tâche complexe en classe, l'autonomie laissée aux élèves avant ou pendant la résolution de la tâche est trop faible, seront-ils alors capables de résoudre cette même tâche seuls ? Nous nous demandons aussi par exemple si les exercices cherchés pendant les modules en demi-classe, alors que les élèves sont amenés à travailler seuls et bénéficient d'un temps de travail assez long, permettent un "meilleur" apprentissage que ceux qui sont effectués sous la conduite du professeur où les élèves sont étroitement guidés.

Enfin, pour chacune de ces organisations du travail des élèves en classe, nous nous demandons quels sont les élèves qui en bénéficient le plus : lesquels tireront parti d'un temps de recherche individuelle ou d'une initiative qui leur a été laissée ?

Finalement, cela revient pour nous à chercher s'il existe une ou plusieurs variables du travail en classe qui semblent plus ou moins déterminantes dans la réussite des élèves à un exercice donné au contrôle, et peut-être dans leur apprentissage éventuel. Est-ce le nombre d'exercices donnés sur le sujet, ou plutôt une même association de connaissances anciennes avec la connaissance nouvelle ou encore, peut-être, une même configuration géométrique dans laquelle appliquer la propriété en classe et en contrôle ? Quel est le taux de réussite des élèves à certaines tâches, lorsqu'elles sont posées telles quelles en classe puis en contrôle ?

Il est cependant peu probable que le professeur donne en contrôle à ses élèves uniquement des exercices exactement calqués sur ceux faits en classe, il nous faut donc envisager plusieurs variables liées à ces exercices qu'il nous faudra prendre en compte. Nous pouvons, par exemple, nous interroger sur l'importance du choix de la configuration géométrique dans laquelle l'exercice est traité. Nous pouvons aussi prendre en compte la difficulté pour les élèves de mélanger des connaissances nouvelles avec d'autres plus anciennes.

Cela nous amène à renseigner plusieurs dimensions.

a) La notion en jeu

Rappelons que nous avons choisi ici de travailler sur la notion de triangles semblables en classe de 2nde, et donc de nous intéresser à une notion nouvelle pour les élèves, pour mieux cerner leurs apprentissages sur ce sujet.

Dans un premier temps, nous étudierons précisément la nature des contenus en jeu dans les séances observées. Nous voulons déterminer quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour comprendre la notion nouvelle, c'est à dire pour pouvoir démontrer les propriétés du cours et évaluer leur intérêt en tant que nouvel outil. Nous verrons que dans le cas des triangles semblables, l'analyse du type de notion explique de manière assez convaincante certains des problèmes rencontrés par les élèves.

D'autre part, nous considérons que les choix du professeur en termes d'enseignement s'inscrivent dans une palette de possibles, dictée en partie par le programme scolaire et les horaires, qui déterminent ce que les élèves peuvent connaître à l'issue du chapitre. C'est en étudiant la notion à enseigner que nous pouvons mieux comprendre comment elle s'imbrique dans le réseau des connaissances anciennes des élèves, et quelles autres notions il faudra mobiliser pour introduire et faire travailler cette notion nouvelle. En effet, on peut penser que l'articulation entre les différentes notions – déjà acquises ou en cours d'acquisition - va jouer un rôle dans l'apprentissage des élèves, et peut être à l'origine de certaines difficultés. Si, par exemple, l'écart théorique est trop grand entre l'ancien et le nouveau, il se peut que l'apprentissage se fasse plus difficilement.

Il peut être intéressant aussi, pour compléter cette palette, de faire l'inventaire des exercices qu'on peut trouver dans les manuels de mathématiques de 2nde, qui, tenant compte du programme, ont eux aussi fait des choix stratégiques, parfois différents, dans l'organisation de leur chapitre sur les triangles semblables, et parmi lesquels les professeurs vont souvent puiser des exercices pour donner du travail aux élèves à faire en classe ou à la maison.

Nous pensons qu'une analyse de la notion est ainsi nécessaire, non seulement pour comprendre les choix faits par les professeurs dans leurs enseignements – le temps passé sur la notion, à quel moment de l'année et avec quelle articulation avec d'autres notions – mais aussi pour expliquer certains obstacles qui pourraient en découler pour les élèves. Nous réaliserons ici une analyse de la notion de triangles semblables, à travers son évolution à la fois dans l'histoire des mathématiques, mais aussi dans les programmes et manuels scolaires.

b) La séquence précise

Nous avons réalisé des observations dans des classes, et filmé toutes les séances portant sur les triangles semblables, afin de reconstituer les tâches et les activités qui ont eu lieu sur ce chapitre.

Nous analysons, pour toutes les séances portant sur la notion étudiée – et pour ces séances uniquement – le cours donné aux élèves (les activités d'introduction s'il y en a, les définitions, les propriétés et leur démonstration éventuelle), et l'intégralité des tâches proposées en cours, c'est à dire en particulier tous les énoncés donnés aux élèves, oralement ou par écrit, lors des séances en classe ou en devoir à la maison. Nous analyserons chacune de ces tâches avec des outils que nous préciserons dans le chapitre II, explicitant notre méthodologie. Nous cherchons à caractériser les choix qui ont été faits par chacun des professeurs dans le cours sur les triangles semblables : quel lien a été fait avec ce qui précède, comment les propriétés nouvelles ont-elles été introduites, et quels sont les exercices dans lesquels elles ont été mises en œuvre. Nous analysons donc en particulier tous les exercices proposés en classe, en termes de complexité, de diversité, de quantité.

Nous analysons aussi le déroulement précis des activités qui sont liées à ces exercices : tout ce que le professeur va organiser dans sa classe et qui a trait au travail des élèves. Ces activités sont en partie visibles sur les vidéos dont nous disposons. Nous nous intéressons à toutes les interventions du professeur qui ont ou peuvent avoir une influence sur le travail des élèves, en particulier à toutes celles qui modifient les tâches des énoncés que nous avons analysés auparavant.

Les choix qui s'offrent au professeur restent, malgré les contraintes dont dépend son enseignement, relativement larges. C'est lui en effet qui décide de la durée de l'ensemble des tâches à effectuer, de la gestion de sa classe et des formes de travail à adopter, même si les réactions des élèves à ces propositions peuvent infléchir le scénario prévu.

Ces deux analyses – tâches et déroulement – sont liées, elles nous permettent d'analyser le travail potentiellement effectué par les élèves pour le mettre en regard des apprentissages éventuels. Elles nous permettent aussi de comparer les pratiques de différents professeurs, afin d'essayer de dégager des influences sur les apprentissages de leurs élèves. Nous donnerons plus loin les critères qui nous ont permis de construire nos grilles d'analyse conjointe des tâches et des déroulements.

Sur les vidéos, nous ne pouvons pas voir travailler les élèves, car la caméra est tournée vers le tableau et donc, la plupart du temps, vers le professeur. Nous ne pouvons pas non plus évaluer l'étendue de leurs connaissances sur les triangles semblables. C'est pourquoi nous avons relevé les copies des élèves après le contrôle de fin de chapitre, afin d'essayer de constater de leurs apprentissages éventuels.

c) La mise en relation avec le contrôle

S'il nous faut étudier plus précisément les conditions dans lesquelles toutes les tâches proposées ont été effectuées en classe, c'est pour pouvoir les comparer, si c'est possible, avec les tâches du contrôle. Il est important pour nous de savoir ce que les élèves ont pu réellement faire dans le cadre du chapitre, en particulier si une application faite en classe a vraiment été à la charge des élèves, ou bien si le professeur ne leur a pas laissé l'autonomie nécessaire pour résoudre seuls les différentes étapes de l'exercice proposé. Dans ce dernier cas il est intéressant pour nous de voir comment les élèves réagissent lorsqu'ils sont confrontés aux difficultés qu'ils n'ont pas rencontrées en classe, lors du contrôle.

Nous étudions les tâches du contrôle suivant les mêmes critères que les tâches en classe, et nous regardons les résultats obtenus par les élèves en contrôle en fonction des types de tâches des exercices de l'énoncé. Nous questionnons alors la relation entre ce qui n'a pas été fait en classe – ou plus exactement ce qui n'a pas été fait par les élèves de manière autonome - et les résultats des élèves.

Les méthodes utilisées pour ces analyses successives sont plus longuement détaillées dans le chapitre suivant.

II) Eléments de méthodologie : outils pour les analyses

Nous allons définir et détailler ici toutes les variables que nous avons prises en compte dans nos analyses et qui nous ont permis de construire des grilles de comparaison entre les tâches en classe et les tâches du contrôle, mais aussi par la suite, des grilles de comparaison des pratiques des différents professeurs observés.

1) Méthodologie pour l'analyse de la notion 30

a) Les types de notions 30
b) La nécessité d'une analyse épistémologique 31

2) Méthodologie pour l'analyse des tâches 32

a) Outils pour l'analyse des tâches 32
b) Evolution des tâches prescrites 37
c) Deux autres des variables des tâches, liées à la notion choisie 37

3) Méthodologie pour l'analyse du déroulement 38

a) Chronologie 38
b) Analyse des aides : les accompagnements du professeur 39
c) Analyse des formes de travail des élèves en classe 42
d) Construction des tableaux 43

4) Méthodologie pour la comparaison avec les contrôles 47

a) Analyse des tâches du contrôle 48
b) Comparaison avec les tâches du cours 48
c) Le contrôle comme témoin des apprentissages 51
d) Les recherches en didactique des mathématiques sur le contrôle 52

5) Méthodologie pour l'analyse des exercices des manuels 53
6) Méthodologie pour l'analyse des pratiques et pour la comparaison entre les professeurs 53

a) L'enseignement en temps qu'organisation du savoir 53
b) L'enseignement en temps que métier 54

7) Méthodologie pour la description raisonnée 55
8) Méthodologie pour l'utilisation de la vidéo dans l'analyse des pratiques : un outil récent en didactique 56

1) Méthodologie pour l'analyse de la notion

Une analyse des contenus enseignés est indispensable pour nous, afin de bien comprendre les apprentissages en jeu chez les élèves. Nous allons donc préciser plusieurs types de notion, en fonction de la façon dont celles-ci complètent les connaissances déjà supposées acquises des élèves, et en fonction aussi du stade de cette acquisition.

a) Les types de notions

Cette analyse doit dépendre du niveau scolaire des élèves, car une même notion est souvent enseignée à plusieurs reprises et à plusieurs niveaux ; elle n'a pas le même statut et ne représente pas les mêmes enjeux d'apprentissage selon les classes. De nombreuses connaissances sont reprises année après année et retravaillées dans différents contextes, à tel point que certaines finissent éventuellement par ne plus être des enjeux d'apprentissage. Nous parlerons de connaissance mobilisable pour désigner une connaissance qu'un élève est capable d'utiliser lorsqu'on le lui suggère, et de connaissance disponible pour désigner celles qu'il peut faire fonctionner spontanément.

Dans le cas des séances que nous avons choisi de filmer, le cours porte sur une connaissance entièrement nouvelle pour les élèves. Il est important pour nous de savoir comment ces propriétés nouvelles s'insèrent dans l'ensemble des connaissances mathématiques des élèves déjà acquises ou en cours d'acquisition. En particulier, nous regardons comment les notions nouvelles sont reliées aux notions plus anciennes, et à quoi elles peuvent servir pour les élèves. Cela contribue à déterminer, pour le professeur, la façon dont la notion nouvelle peut être introduite aux élèves, et a posteriori, en considérant la manière dont ces notions peuvent être retravaillées par la suite, à travers d'autres notions notamment, cela nous indique quelles devraient être les applications à envisager.

Pour organiser plus clairement cette classification, nous allons distinguer trois grands types de notions nouvelles, en fonction de la façon dont elles viennent s'ajouter aux connaissances antérieures des élèves. Cela conditionne les introductions possibles de ces notions dans le cours :

- Les notions présentées aux élèves comme extensions de notion déjà enseignées. Elles viennent alors compléter, approfondir certaines propriétés déjà connues.

Par exemple, la notion de prisme droit en classe de 5ème, qui vient compléter la famille de solides de l'espace déjà connus par les élèves.

- Les notions qui sont présentées aux élèves comme *réponse à un problème* posé

Par exemple, la notion de racine carrée, qui permet, en classe de 4$^{\text{ème}}$, de calculer des longueurs grâce au théorème de Pythagore[8].

- Les notions qui portent un nouveau formalisme, qui unifient et / ou généralisent un ensemble de connaissances déjà enseignées (notées *FUG*)

Par exemple, la notion de vecteur en classe de 3$^{\text{ème}}$, qui porte un nouveau formalisme, ou encore la notion de fonction en classe de 2$^{\text{nde}}$, qui généralise le cas particulier des applications affines vues au collège.

Les programmes scolaires incitent souvent à introduire les notions nouvelles comme étant des réponses à un problème, consigne que l'on retrouve dans les choix faits par les manuels scolaires, dont les "approches" ouvrent généralement chaque chapitre à travers la résolution d'un problème plus ou moins ouvert.

La prise en compte des introductions de notions nouvelles en classe ne peut certainement se faire que dans une étude sur le long terme. Cela joue peut-être sur la construction du sens et sur l'entrée dans certaines démarches, et donc sur l'acquisition de la disponibilité, mais cela ne peut se voir à l'échelle d'un seul chapitre.

b) La nécessité d'une analyse épistémologique

L'analyse de la notion est fortement liée aux programmes scolaires qui imposent les savoirs enseignés aux élèves au cours de leur scolarité, mais aussi à l'origine de la notion étudiée dans l'histoire des mathématiques. En effet, en tant que savoir scolaire, la notion de triangles semblables a fait l'objet d'une transposition didactique (Chevallard, 1985) passant ainsi du savoir savant au savoir à enseigner. Cette transposition peut occasionner des modifications plus ou

[8] C'est un moyen, il y en a d'autres !

moins grandes du savoir en question, pour l'intégrer dans les programmes scolaires. Quels liens y a-t-il ici entre les cas de similitude et le chapitre enseigné aux élèves de 2nde ?

A partir l'histoire des mathématiques, nous voulons essayer de comprendre ce qui motive l'apparition et l'évolution de cette notion, afin d'essayer de déterminer son utilité pour les élèves, et d'expliquer son évolution – mais dans l'enseignement des mathématiques cette fois-ci.

De plus, il est possible que cette transposition ait nécessité de retirer ou de rajouter certains éléments mathématiques, pour assurer la cohérence de l'ensemble – en particulier avec les enseignements qui précèdent et avec ceux qui suivent dans les programmes – et pour respecter les horaires imposés à ces enseignements. Est-ce le cas ici ? Quel sera alors l'effet de cette réorganisation – surtout la perte de ce qui "manque" – sur les apprentissages des élèves et sur les marges de manœuvre laissées aux professeurs ?

2) Méthodologie pour l'analyse des tâches

a) Outils pour l'analyse des tâches

Nous allons expliquer ici les différentes variables que nous prenons en compte pour l'analyse des tâches en classe, puis en contrôle.

Nous définissons comme une tâche – définie mathématiquement – tout ce que l'élève doit faire en classe, et qui est la plupart du temps proposé par le professeur. Par exemple on parlera de tâche pour qualifier un énoncé d'exercice à résoudre. Mais aussi, plus finement, on pourra considérer comme tâche chacune des étapes nécessaires à la résolution de cet énoncé – que nous appellerons sous-tâches lorsqu'elles sont clairement distinctes. Ce qui est attendu de l'élève en classe peut-être aussi un travail non mathématique, comme par exemple de recopier une correction, ou de chercher un théorème dans le cours. Dans tous ces cas, nous parlerons d'activités provoquées par la tâche prescrite, ou parfois seulement d'activité potentielle lorsque nous ne pouvons pas savoir si les élèves s'y sont bien attelé.

Nous découpons les séances observées en fonction de la liste de toutes les tâches qui y sont proposées, ou qui découlent des propositions du professeur.

Nous analysons le travail que doivent effectuer les élèves pour réaliser les tâches mathématiques demandées. Il ne s'agit pas d'une analyse des tâches au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), car nous ne nous préoccupons a priori pas des techniques ou des technologies[9]. Nous distinguons plusieurs degrés de difficulté, en fonction de ce que les élèves doivent mettre en œuvre a priori pour appliquer une certaine propriété du cours. Nous appelons adaptation ce travail préalable à l'application. Dans les cas les plus simples, il s'agit de reconnaître la propriété du cours en question, voire même seulement de l'appliquer avec les paramètres de l'énoncé. La complexité des adaptations est relative au niveau scolaire et au contexte d'une classe donnée, et dépend en partie des connaissances supposées anciennes des élèves : remplacer des longueurs par des lettres dans le théorème de Thalès est une adaptation en milieu de 3ème, ça l'est moins en classe de 2nde. En revanche résoudre une équation algébrique à partir d'une application du théorème de Thalès reste une adaptation en seconde. L'analyse que nous allons réaliser est donc relative à un niveau scolaire donné, et même à une classe donnée

Nous pensons que c'est par le jeu des différentes adaptations d'une même propriété proposées aux élèves que l'apprentissage peut se faire. Nous considérons aussi que les tâches données en classe, associées à des gestions différentes des activités, peuvent avoir diverses influences sur les apprentissages des élèves. Les analyses a posteriori nous permettent de vérifier cette hypothèse.

Nous distinguons pour l'analyse des tâches :

- *Les tâches simples :* application immédiate d'un théorème (définition, propriété, type de raisonnement…) sans reconnaissance ni travail préalable, lorsqu'il suffit de remplacer les conclusions du théorème (définition, propriété…) par les données de l'exercice.

Par exemple remplacer la formule du théorème de Thalès par les lettres propres à la figure et les valeurs numériques de l'énoncé. Souvent dans ce cas il n'y a pas besoin de vérifier les hypothèses qui sont automatiquement celles dont il y a besoin.

- *Les tâches isolées* : application d'un théorème sans changement de cadre ou de registre, sans introduire d'autre connaissance, mais avec un travail interne nécessaire de la part des élèves.

Par exemple, s'il faut reconnaître où appliquer le théorème de Thalès dans une figure complexe, mais qu'il n'est pas nécessaire de prouver le parallélisme au préalable. L'adaptation consiste ici à repérer une sous-figure.

[9] même si nous nous penchons sur les méthodes proposées dans le cours et leur justification éventuelle

- *Les tâches complexes* : (ni simples ni isolées), qui supposent une organisation des connaissances des élèves, pour une mise en fonctionnement un peu plus large. Les élèves doivent être capables d'aller chercher eux-mêmes en partie les outils nécessaires à la résolution. C'est le cas lorsqu'il est nécessaire de faire une adaptation par *changement de cadre* (non isolée) ou *l'introduction de plusieurs étapes*, répétitives ou non, indépendantes ou non (non simple).

Par exemple, en reprenant encore le théorème de Thalès, il peut s'agir d'un exercice où des longueurs sont inconnues et où l'application du théorème mène l'élève à une équation algébrique à résoudre (mélange de cadres), ou bien il peut y avoir une figure où il faudra démontrer le parallélisme pour pouvoir ensuite utiliser le théorème de Thalès afin de calculer des longueurs (introduction d'étapes), ou encore un exercice qui nécessite l'application du théorème dans différents triangles, à l'aide de plusieurs paires de droites parallèles, pour en déduire une relation entre plusieurs longueurs (utilisation des questions précédentes).

Comme nous pouvons le voir sur ces exemples, les complications qui peuvent intervenir lors de l'application d'une propriété sont nombreuses, nous allons donc essayer de différencier certains types de difficultés que les élèves peuvent être amenés à rencontrer dans la résolution d'une tâche complexe, et qui peuvent amener à des activités complémentaires par rapport aux applications et aux tâches possibles. Nous distinguons ainsi six grands types d'adaptations d'une notion, classés a priori par nous selon les difficultés des activités mathématiques correspondantes des élèves, et qui participent à la complexité d'une tâche.

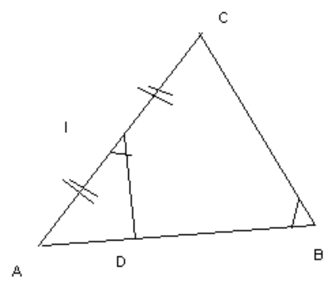
Nous définissons ainsi six *niveaux de mises en fonctionnement*[10] (Robert, 1988) *:*

- *La reconnaissance des modalités d'application :* cette adaptation est toujours nécessaire quelle que soit l'application, même isolée. Elle consiste, comme son nom l'indique, à reconnaître dans un énoncé les hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème.

Parmi toutes les modalités à reconnaître, nous retenons ici en particulier le *repérage sur la figure des sommets homologues* de deux triangles semblables, donnés ou non. Lorsque ce repérage est rendu plus difficile, parce que les triangles considérés sont emboîtés[11], il est probable que cela pose un problème aux élèves. Par exemple, sur la figure suivante, les élèves ne perçoivent pas

[10] Notés NMF par la suite
[11] Et non en position de Thalès

toujours quels sommets associer :



Parfois c'est l'énoncé qui leur indique le repérage des homologues, lorsque les lettres des deux triangles sont données dans le bon ordre (ici AID et ABC), parfois c'est la question suivante qui leur permet de trouver le bon ordre (par exemple ici s'il faut prouver que AI x AC = AB x AD, les élèves reconstituent l'égalité des rapports AI/AB et AD/AC puis retrouvent en "trichant" les sommets homologues). Parfois, enfin, le repérage des homologues reste entièrement à leur charge, a priori. Nous verrons qu'il n'y a cependant pas de méthode proposée par les professeurs pour ce repérage dans les cours que nous avons filmés, et la difficulté de cette tâche pour les élèves n'est pas négligeable. Nous mettons donc particulièrement en évidence cette adaptation, lorsqu'elle est nécessaire pour la résolution d'un exercice.

- *Le calcul d'intermédiaires :* il s'agit d'une adaptation à faire s'il manque une ou plusieurs données numériques pour pouvoir appliquer une propriété.

Par exemple si l'exercice donne un seul angle sur les deux nécessaires pour pouvoir démontrer la similitude de deux triangles. On peut accroître cette difficulté par la nécessité d'introduire des notations, de nommer des points, ou même de construire des éléments géométriques nouveaux.

- *Le mélange de plusieurs cadres ou notions*, *les changements de point de vue ou de registre.*

Cette adaptation intervient par exemple lorsqu'il s'agit de trouver une longueur inconnue sur une figure géométrique à l'aide d'une résolution algébrique d'équation (passage des cadre et registre géométriques à ceux de l'algèbre).

- *L'introduction d'étapes :* s'il s'agit pour l'élève d'effectuer un raisonnement préalable à l'application et qui n'est pas précisé dans l'énoncé, c'est-à-dire de réaliser seul un découpage de la tâche donnée en plusieurs sous-tâches, successives ou en parallèle.

Par exemple dans ce chapitre, c'est le cas s'il faut démontrer une égalité de deux éléments en démontrant l'égalité à un même troisième.

- *L'utilisation des questions précédentes :* il s'agit ici de reconnaître la nécessité d'une mise en relation entre les différentes questions, en utilisant les résultats d'une ou plusieurs questions précédentes, ou encore en reproduisant une méthode déjà utilisée au début de l'exercice, mais qui n'est pas explicitée à nouveau..

Par exemple, pour les triangles semblables, cela peut intervenir dans un exercice où l'on détaille les étapes de l'obtention d'une expression algébrique – démonstration de la similitude de deux triangles puis exploitation de l'égalité des rapports de longueurs – puis qu'on demande de trouver une autre expression, sans donner les triangles à considérer cette fois-ci.

- *La nécessité de faire des choix*.

C'est une adaptation nécessaire lorsque la question posée laisse planer une incertitude. Par exemple, lorsqu'il y a plusieurs éléments à déterminer dans une même question, il peut être difficile pour l'élève de choisir l'ordre dans lequel les calculs vont être effectués, en particulier ce qu'il faut faire en premier. Il peut s'agir aussi d'un choix de cadre ou de registre pour résoudre un problème, ou d'un choix de méthode lorsque plusieurs sont possibles.

Les tâches qui sont pour nous les plus complexes sont celles qui mettront en jeu la capacité de l'élève à élaborer une méthode de résolution ou de démonstration (appliquer un théorème lorsque celui-ci n'est pas indiqué, introduire des étapes) ; et les plus simples celles qui nécessitent de la part de l'élève une seule application immédiate (par exemple : appliquer un théorème donné en remplaçant par les éléments du contexte de l'exercice). Cette classification de la difficulté des niveaux de mise en fonctionnement est un peu arbitraire, mais elle correspond tout de même à des constats faits sur les élèves.

Nous nous intéressons particulièrement aux tâches qui sollicitent de la part des élèves diverses adaptations des connaissances visées sur les triangles semblables, mais nous signalons aussi les autres connaissances qui interviennent dans les exercices proposés aux élèves.

Nous retrouvons dans les séances analysées la plupart de ces différents types de tâches, et nous analysons leur variété et leur progression tout au long du chapitre, afin d'en tirer des conséquences sur les apprentissages éventuels.

b) Evolution des tâches prescrites

Comme nous l'avons signalé auparavant, les tâches données aux élèves peuvent évoluer au cours de l'activité, conséquemment aux interventions du professeur, qui ré-oriente le travail que les élèves sont en train de faire, mais modifie aussi les tâches qu'il leur reste à effectuer. Ces interventions modulent souvent les difficultés rencontrées par les élèves. De manière un peu caricaturale : si la tâche est trop difficile (complexe), les élèves peuvent se décourager avant d'avoir trouvé une solution, et le professeur peut alors intervenir pour relancer leur activité, en simplifiant la tâche ; en revanche si elle est trop aisée (isolée), on peut se demander dans quelle mesure elle permet un apprentissage des élèves. Les aides apportées pendant l'activité enlèvent souvent les adaptations nécessaires – l'incertitude, le doute, l'autonomie – mais permettent par ailleurs de maintenir ou relancer le travail pour un plus grand nombre d'élèves.

Nous allons donc réaliser une analyse a priori, qui tiendra compte de la tâche initiale donnée par le professeur et des stratégies de résolution que nous envisageons comme possibles pour les élèves, compte tenu de leur niveau. Nous réalisons ensuite une analyse qui tiendra compte du déroulement associé à ces tâches, c'est à dire à la manière dont l'activité des élèves a été (ré)organisée, et qui reflète cette fois-ci l'évolution des tâches prescrites, depuis la tâche initiale jusqu'à l'ensemble des tâches et sous-tâches qui ont été présentées aux élèves.

L'analyse a priori nous amène à supposer des adaptations que les analyses de déroulement nous permettent de préciser.

Nous ne cherchons pas du tout à donner la "meilleure" gestion possible du travail des élèves pour cette notion. En effet, comme nous l'avons signalé au chapitre précédent, ces différentes gestions sont fortement liées aux pratiques des enseignants, dont nous avons défini les différentes composantes dans notre cadre théorique. Toutes les organisations ne sont pas possibles pour chacun des professeurs (Hache, 2001) compte tenu de leur expérience et des contraintes institutionnelles qu'ils doivent prendre en compte.

c) Deux autres des variables des tâches, liées à la notion choisie

Nous avons choisi de faire notre étude sur un chapitre de géométrie, cela nous amène à préciser, dans les différents types de tâches, la configuration géométrique dans laquelle se situe l'exercice. Nous considérons qu'elle peut ajouter à la complexité du travail demandé à l'élève. En particulier, si la figure n'est pas donnée, ou bien encore – comme nous l'avons déjà expliqué plus haut – si les triangles semblables sont dans une configuration où il n'est pas facile d'associer les sommets homologues, l'élève aura peut-être plus de mal à résoudre la question posée.

Nous avons aussi choisi de relever les connaissances anciennes qui pourraient intervenir dans les exercices. Par connaissances anciennes nous entendons connaissances plus anciennes que la notion de triangles semblables, vues au cours des années précédentes ou bien plus tôt dans l'année de la 2nde. Ces connaissances, bien que plus anciennes, ne sont pas toujours maîtrisées par les élèves, et, suivant le moment où elles interviennent dans l'exercice, elles peuvent lui rendre la tâche plus compliquée. Par exemple, si dans un exercice il faut utiliser le théorème de l'angle inscrit, afin de démontrer une égalité d'angle qui va permettre, par la suite, de démontrer la similitude de deux triangles, il se peut qu'un élève qui ne réussit pas cette application ait été bloqué plutôt par l'ancien que par le nouveau.

Nous verrons que dans ce chapitre, conformément aux instructions du programme, il est fait une place importante à la révision des propriétés de géométrie apprises au collège. C'est pourquoi nous relevons ces connaissances lorsqu'elles sont présentes dans les exercices proposés, et nous précisons comment elles interviennent par rapport à la connaissance nouvelle. Là encore, les interventions du professeur peuvent modifier la tâche prescrite à l'élève : si la notion ancienne est révisée juste avant l'exercice, ou rappelée par le professeur dès le début de l'activité, alors la difficulté a priori pour l'élève est contournée.

3) Méthodologie pour l'analyse du déroulement

a) Chronologie

A partir des vidéos dont nous disposons, nous réalisons une chronologie de chaque séance filmée, où nous indiquons les différents moments de l'activité mathématique des élèves. Nous distinguons en particulier l'introduction de la notion, son institutionnalisation[12] dans le cours, avec la donnée des définitions et des propriétés nouvelles, et pour les séances d'exercices, nous délimitons, pour chaque tâche prescrite, les moments de recherche individuelle des élèves, d'aide du professeur, de correction et d'institutionnalisation éventuelle des résultats trouvés.

[12] Institutionnalisation : "consiste à donner un statut didactique, scolaire, culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. Elle peut aussi bien porter sur une situation d'action que sur une situation de formulation ou de preuve" G. BROUSSESAU (1995)

L'analyse a priori est construite à partir des énoncés des exercices donnés en classe, et de l'ordre dans lequel ils ont été traités, en particulier en fonction du cours nouveau. A partir de cette première analyse, que nous confrontons au déroulement précis des différents moments des séances, nous pouvons voir ce qui a été supprimé ou ajouté par le professeur au niveau des tâches prescrites aux élèves. Cela nous renseigne à la fois sur ce qui a été prévu par le professeur et sur ce qui a été potentiellement travaillé en classe par les élèves.

b) Analyse des aides : les accompagnements du professeur

Les accompagnements du professeur ont une influence potentielle sur les activités de l'élève. Suivant les indications apportées par le professeur avant, pendant et après le travail, la tâche proposée peut se trouver simplifiée, provoquant donc plus aisément chez l'élève une activité attendue, permettant son entrée dans la tâche, ou favorisant la mémorisation pour une utilisation ultérieure. Les nuances dans les interventions du professeur modifient pour l'élève de manière plus ou moins directe la nature de la tâche, et en particulier sa complexité.

Pour mieux rendre compte des interventions du professeur pendant l'activité, et en faire une classification, nous allons tout d'abord définir la nature des aides dispensées, qui est liée à la nature de la tâche et aux différentes étapes de sa résolution. Nous tiendrons compte, selon les professeurs, de la plupart des aides suivantes, que nous avons classées ici plus ou moins en fonction du moment où elles interviennent généralement pendant l'activité des élèves :

- *Aide à la mise en route* : prise en main, aide au découpage de ce qu'il faut faire.

Si le professeur intervient dès le début d'un exercice par des questions du type : Qu'est ce qu'on cherche ? Comment on va faire ? La mise en route n'apporte pas d'élément de réponse, mais elle pose aux élèves les questions qu'eux-mêmes doivent se poser pour démarrer l'exercice.

- *Aide au choix de l'outil*

Par son intervention, le professeur indique aux élèves quel théorème du cours il va falloir utiliser pour résoudre la question posée. Il peut s'agir d'une propriété à appliquer directement, ou nécessitant des adaptations préalables.

Le choix du théorème à appliquer est souvent aussi dicté par le fait que, si la classe est en plein milieu du chapitre sur le théorème de Thalès, il va certainement falloir utiliser le théorème de Thalès ! On parlera alors de l'*effet de contrat didactique*[13] : les élèves utilisent la propriété dont l'apprentissage est visé parce que c'est ce que le professeur attend d'eux, et non pas parce que c'est une propriété pertinente pour résoudre le problème posé. Cependant, si les élèves ont plusieurs théorèmes à leur disposition – par exemple théorème ET réciproque du théorème de Thalès – cette aide peut leur éviter de chercher eux-mêmes, si le professeur la précise, la propriété du cours adéquate.

- *Aide au choix de la méthode* ou à la structuration de la méthode

Par cette aide, le professeur suggère, au moins partiellement, l'organisation de la résolution – avec quelles étapes et dans quel ordre on va résoudre .

- *Aide au changement de registre*

Le professeur aide ainsi au passage de la question posée par l'énoncé dans un registre donné – éventuellement en langage courant, ou encore par exemple dans un contexte géométrique, par la donnée d'une figure - à la résolution mathématique dans un autre registre – algébrique, fonctionnel etc.

- *Aide à l'activité*

Cette intervention du professeur sert à relancer ou à maintenir l'activité des élèves. Elle peut porter sur des consignes qui ne sont pas vraiment mathématiques, par exemple si le professeur dit "pense au cours" à un élève qui cherche quoi utiliser, ou encore "où est ton compas" à un élève qui n'a pas encore trouvé comment faire une figure géométrique.

On pourrait considérer que de nombreuses interventions sont des aides à l'activité : en effet, c'est pour relancer l'activité des élèves ou d'une partie des élèves que le professeur intervient, souvent pour faire avancer ceux qui sont restés bloqués sur une étape du travail à faire. Nous considérons plutôt comme une aide à l'activité les aides qui ne rentrent pas dans une catégorie plus précise.

Nous tenons compte aussi de la forme des aides, car les interventions du professeur se font de différentes manières. Beaucoup sont réalisées sur le mode interrogatif, à travers des questions plus ou moins ouvertes, pouvant porter par exemple sur le travail de l'élève ou sur le

[13] Cf. BROUSSEAU (1988)

cours. Ces questions n'amènent pas toujours le même degré de réflexion chez les élèves, suivant qu'elles supposent une réponse élaborée (questions ouvertes) ou juste un oui/non ou une réponse restreinte (questions fermées). Tous les échanges ne se font pas forcément sous forme de question – réponse ; nous essayons aussi de prendre en compte, lorsque nous les repérons sur les vidéos :

- *Les phrases inachevées, à compléter*

Forme très particulière de question que nous mettrons donc à part, et qui facilite apparemment le travail des élèves en leur apportant la première partie de la réponse. Lorsqu'il s'agit d'une phrase tirée du cours, celle-ci les incite uniquement à réciter leur leçon.

- *Les rappels de cours*

Ils donnent une indication sur l'objet mathématique utilisé en remettant en mémoire pour les élèves de la classe les éléments du cours – nouveaux ou non – à utiliser.

- *Les consignes*

Elles permettent au professeur, sur un mode plus ou moins impératif, de faire réaliser à l'élève des sous-tâches, sans forcément laisser d'initiative à celui-ci ; ou les rappels de consigne, qui relancent le travail de l'élève lorsqu'il est bloqué en début ou en cours d'exercice

- *Les validations*

Elles permettent de relancer le travail de l'élève en lui apportant la confirmation de l'utilité ou de la justesse de ses démarches, et les *invalidations*, plus ou moins riches en explications, qui réoriente son travail lorsque celui-ci a commis une erreur ;

Nous pouvons prendre en compte aussi d'autres interventions qui ne font pas partie du discours mathématique et qui ne donnent pas toujours lieu à une réaction de la part de l'élève, mais qui permettent une approche différente de l'exercice, parfois moins rébarbative :

- *Les conseils*

Ils sont prodigués par le professeur, qui peuvent porter sur des astuces facilitant le travail pour l'élève, ou souligner une méthode efficace, plus rapide.

- *Les remarques*

Faites sur le ton du discours ou de la plaisanterie ; elles marquent parfois plus fortement l'esprit de l'élève, puisqu'il pourra peut-être se les formuler à nouveau avec ses mots à lui.

La prise en compte de toutes ces interventions nous permet de redéfinir, de manière assez fine, le travail des élèves, au fur et à mesure que leurs activités potentielles évoluent. En effet, une aide directive de la part du professeur peut diriger l'ensemble des élèves vers une résolution attendue, tandis qu'une intervention plus ouverte, ou survenant plus tard dans l'activité des élèves permettra peut-être à certains d'entre eux d'êtres confrontés aux difficultés de l'exercice et d'y faire face – momentanément – seuls.

Pour reconstruire ces activités, nous recomposons tous les renseignements dont nous disposons sur les activités possibles, compte tenu du déroulement en classe – et ce n'est pas si facile ! Par exemple nous ne savons pas si les élèves vont attendre les indications du professeur pour résoudre, ni même d'ailleurs s'ils les prendront en compte. Aussi nous ne pouvons dire combien de temps chaque élève a travaillé sur la question posée avant qu'elle ne soit simplifiée ou corrigée. Pour pouvoir réaliser nos analyses, nous nous appuyons sur l'hypothèse que les élèves – ou une grande partie d'entre eux du moins – "entendent" ce que dit le professeur.

c) Analyse des formes de travail des élèves en classe

Les types d'activités déclenchées chez les élèves par les tâches proposées peuvent être variés selon les formes de travail adoptées. Nous nous intéressons plus particulièrement aux différentes variables suivantes :

- *le temps de recherche* laissé éventuellement aux élèves lors de la résolution d'exercices,
- *les différentes organisations du travail en classe*, collectif ou individuel.

Non seulement ces variables jouent sur les activités faites en classe, permettant ou non une certaine autonomie, certaines initiatives, des échanges et discussions entre élèves[14] mais encore nous pouvons supposer que les habitudes de travail correspondantes prises en classes peuvent influencer les élèves dans la conduite de leur travail personnel.

Finalement, nous analysons les temps de silence du professeur, les temps de recherche laissés aux élèves, la nature des aides apportées par le professeur, et le moment de l'activité où ces aides sont données, les activités visibles des élèves, et enfin, les types de correction apportée.

[14] Toutes variables dont les hypothèses didactiques indiquent l'importance pour les apprentissages

Toutes ces informations ont été reportées dans des tableaux[15] , dans lesquels nous avons essayé de tenir compte de la richesse de nos données et qui nous ont été utiles pour parvenir à synthétiser nos analyses.

d) Construction des tableaux

Pour synthétiser la masse importante des données recueillies, nous les avons consignées dans des tableaux qui nous permettaient d'en faire plus facilement une synthèse. Ces tableaux ont évolué au fur et à mesure de notre recherche, lorsque nous avons cherché à affiner certaines analyses, ou, au contraire, lorsque nous avons décidé de laisser tomber les variables qui ne nous paraissaient pas exploitables. La plupart de ces tableaux sont donnés en annexe.

Tout d'abord, en lieu et place de transcriptions, qui se seraient avérées ici trop coûteuses, nous avons réalisé un premier découpage des séances observées en fonctions du temps.

Voici un exemple des premiers tableaux obtenus – exemple qui sera ensuite repris pour illustrer nos synthèses successives.

classe entière 2^{nde}, premier cours sur les triangles semblables, cours précédent sur les triangles isométriques, retour des vacances de février, accompagnements : feuille de cours et d'exercices		
temps	ce que fait le professeur	ce que les élèves ont à faire et ce qu'ils font
0 min	pose des questions de cours aux élèves sur les propriétés des triangles isométriques déjà étudiées. fait des schémas au tableau illustrant les réponses des élèves leur demande de citer des exemples	les élèves prennent la parole un par un
4 min	introduit le cours sur les triangles semblables	les élèves prennent leur cahier et la feuille d'exercices
5 min 30	organisation du travail, donne à faire aux élèves l'application 1.	
7 min 40	passe dans les rangs, fait des remarques individuelles sur le travail des élèves	utilisation d'une connaissance ancienne (somme des angles d'un triangle), puis application simple, les élèves cherchent.
10 min 35	rappelle la consigne (justifier) rappelle la définition de triangle semblable aide indirecte : "qu'est ce qu'il faut faire ?"	

15 Voir ANNEXES : découpage des séances de Mme B., Mme P. et Mme F.

Dans ces tableaux, nous nous contentons de décrire les séances, pour pouvoir nous y référer ensuite comme à une transcription, malgré une précision moindre : le discours du professeur est rarement pris en compte. Nous avons jugé que cela ne nous importait pas pour cette recherche, car l'analyse du langage, bien qu'envisagée, n'a pas été réalisée. Nous aurions peut-être pu, grâce à la prise en compte du discours, déterminer avec plus de précision l'influence de ce qui se passe en classe sur les apprentissages (Chappet- Paries, 2004) . Cependant, les variables que nous avons retenues nous ont paru assez riches pour rendre compte de cette influence éventuelle, et nous éviter des transcriptions qui auraient pris beaucoup de temps, compte tenu de la durée de nos observations.

Dans un deuxième temps, et en nous référant à ce premier découpage, nous avons construit des tableaux découpés en fonction des tâches initiales prescrites par le professeur. Nous y avons donc détaillé ces tâches, mais aussi décrit le déroulement qui s'y rapportait. Voilà un exemple de l'un de ces premiers tableaux. Nous n'avons pas encore détaillé précisément et une par une les variables qui nous intéressent lors du déroulement.

Voici le tableau pour cette étape de nos analyses, portant ici sur le même exemple que précédemment :

<table>
<tr><td>45 min 35</td><td colspan="3">première séance</td></tr>
<tr><td>durée</td><td>objectif visé et tâche prescrite</td><td colspan="2">découpage du déroulement</td></tr>
<tr><td>4 min</td><td>rappels de cours sur les triangles isométriques</td><td></td><td>questions simples posées aux élèves, qui prennent la parole pour répondre</td></tr>
<tr><td>1 min 30</td><td>introduction du nouveau cours sur les triangles semblables :
donnée de la première définition
D1 : "deux triangles sont semblables s'ils ont trois angles égaux"</td><td></td><td>discours du professeur
les élèves prennent leur cahier</td></tr>
<tr><td rowspan="7">10 min 20</td><td rowspan="7">application 1 : démontrer que deux triangles sont semblables à partir de deux angles donnés numériquement
on a besoin :
- de la définition de triangles semblables (tout nouveau !)
- de la somme des 3 angles d'un triangle (ancien)</td><td>1 min 10</td><td>mise en route</td></tr>
<tr><td>2 min 55</td><td>les élèves cherchent, le professeur passe dans les rangs sans s'adresser à la classe entière</td></tr>
<tr><td>1 min 25</td><td>le professeur relance la recherche: rappel de la consigne, de la définition, aide indirecte "qu'est-ce qu'il faut faire"</td></tr>
<tr><td>1 min</td><td>le professeur écrit l'énoncé et découpe en sous-tâches isolées : il faut calculer le troisième angle pour appliquer la définition</td></tr>
<tr><td>1 min</td><td>les élèves cherchent</td></tr>
<tr><td>2 min</td><td>une élève corrige au tableau, sous les consignes du professeur qui pose des questions simples et isolées structurant la solution, et dicte la rédaction à l'élève.</td></tr>
<tr><td>1 min</td><td>récapitulation, évocation d'autres solutions possibles</td></tr>
</table>

A l'aide de ces tableaux, nous avons réalisé une synthèse de toutes les tâches proposées en classe et à la maison par le professeur, en tenant compte cette fois-ci de notre analyse a priori et de l'analyse du déroulement qui accompagne la tâche. Voici sur le même exemple le tableau ainsi obtenu :

<table>
<tr><th rowspan="3">ex</th><th rowspan="3">Conf</th><th colspan="2">Connaissances</th><th rowspan="3">Niveau de mise en fonctionnement</th><th colspan="4">Déroulement</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Anciennes</th><th rowspan="2">Nouv</th><th rowspan="2">Tps silence</th><th colspan="3">Aides du professeur</th></tr>
<tr><th>Nature</th><th>Moment</th><th>Forme</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2 Δ</td><td>somme angles du triangle</td><td>D1</td><td>calcul d'intermédiaires (comparer le 3^{ème} angle)</td><td>2min55 au début</td><td>mise en route méthode</td><td>après recherche</td><td>question ouverte rappel de cours consigne (justifier)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2 Δ rect</td><td>somme angles, Δ particuliers</td><td>D1</td><td>calcul d'intermédiaires (comparer le 3^{ème} angle)</td><td>2min40 au début</td><td>méthode</td><td>après recherche</td><td>question ("qu'est-ce qui manque ?")</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2 Δ</td><td>somme des angles</td><td>D1</td><td>reconnaissance des modalités d'application</td><td>0min</td><td>méthode</td><td>pendant tout l'ex</td><td>questions ouvertes puis de + en + fermées</td></tr>
</table>

Grâce à ce tableau, nous avons pu réaliser le bilan de toutes les tâches données en classe, ce qui facilite la comparaison future avec le contrôle.

Mais ces tableaux ne rendent pas compte des vraies tâches cherchées par les élèves en classe, c'est à dire des sous-tâches dont la résolution a vraiment été à leur charge. Il était important de préciser, comme conséquence des aides fournies par le professeur, les autonomies laissées aux élèves.

En particulier, nous avons relevé la prise en charge du repérage des sommets homologues en classe : sont-ils donnés par l'énoncé, signalés par le professeur, ou bien ce repérage reste-t-il à la charge des élèves ? Cette synthèse nous permettra, en regardant si les élèves sont performants dans ce repérage en contrôle, de voir si un apprentissage semble bien avoir eu lieu sur ce point.

Nous avons donc construit un quatrième tableau dont voici un exemple, portant toujours sur la même séquence :

ex	type de tâche a priori : ASI ou adaptation	ce que l'élève cherche tout seul en classe	ce que l'élève fait tout seul en classe	connais sances nvelles	repérage des homologues en classe	prise en charge ancien/nveau en classe
1	calcul d'intermédiaires	démo (2min55)	Application Simple et Isolée[16]	D1		pas de mélange
2	calcul d'intermédiaires	démo (2min40)	ASI	D1	le prof insiste sur l'écriture des homologues	pas de mélange
3	reconnaissance des modalités		réponse à des questions à trou	D1		pas de mélange

Enfin, pour certaines tâches données à faire aux élèves, nous avons détaillé la façon dont le professeur est intervenu pour modifier la tâche prescrite. Nous avons donc indiqué, tout au long du déroulement, par des couleurs de plus en plus claires, la simplification progressive des tâches qui restent à faire aux élèves. Cela nous renseigne alors sur ce qu'a pu faire l'élève en classe, pour chaque tâche : sur quoi portait son travail, quelle en était la complexité, et de quel temps il a éventuellement disposé pour y répondre. Les lignes restées blanches concernent les

[16] Notée ASI par la suite

interventions du professeur. Nous avons donc ici une bonne idée de la manière dont le professeur intervient sur le travail des élèves.

1 min 20	consignes : comment travailler aide méthode : rappel sur les outils disponibles
1 min 20	les élèves cherchent seuls NMF : introduction d'étapes
0 min 30	aide méthode: ne pas utiliser la propriété sur les longueurs
9 min 30	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	aide méthode: regardez dans votre cours
1 min	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	relance
1 min 50	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	relance
1 min 20	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	aide méthode: rappel de la propriété D'1 à utiliser
5 min 10	le prof interroge les élèves les élèves font des ASI avec le prof et copient

Légende des couleurs

Interventions du professeur

Complexité de la tâche prescrite : du plus foncé = difficile au plus clair = facile

A l'aide de tous ces tableaux, nous pouvons réaliser une comparaison des tâches en classe et des tâches du contrôle, qui nous permettra de déduire des influences éventuelles de ce qui a été fait en classe sur les apprentissages. Ces tableaux nous donnent aussi une comparaison des tâches prescrites et des "vraies" tâches du cours, qui nous renseigne sur les habitudes de travail des professeurs, et que nous allons commenter et nuancer plus amplement dans nos comparaisons des pratiques.

4) Méthodologie pour la comparaison avec les contrôles

A l'issue du chapitre sur les triangles semblables, les professeurs observés ont posé un contrôle pour évaluer les connaissances des élèves sur cette notion. Nous avons choisi d'utiliser ce contrôle comme un témoin des apprentissages des élèves au moment de la fin du chapitre. L'énoncé a été entièrement décidé par le professeur, l'épreuve s'est déroulée dès la fin du chapitre, dans des conditions habituelles pour la classe et les copies ont été corrigées et notées normalement. Nous avons relevé ces copies après correction.

a) Analyse des tâches du contrôle

Dans un premier temps, nous avons réalisé une analyse a priori des tâches demandées par l'énoncé, en fonction des mêmes variables et critères d'analyse que pour les exercices donnés en classe. La tâche initiale est ici la tâche que l'élève doit résoudre – seul, puisqu'il n'y a pas d'intervention du professeur pendant l'interrogation. S'il y a des sous-tâches, c'est l'énoncé distribué aux élèves qui les définit. Nous avons envisagé les stratégies possibles pour les élèves, ainsi que les erreurs qu'ils pourraient commettre.

Nous avons consigné ces analyses dans un tableau récapitulatif tel que celui-ci :

ex	**Conf**	**Connaissances qui fonctionnent**		**Niveau de mise en fonctionnement**
		Anciennes	**Nouvelles**	
1	2 Δ	Algèbre x	propriété "semblables => proportionnels" P1	reconnaissance des modalités d'application
2	2 Δ rect	Pythagore	propriété "proportionnels => semblables" P'1	calcul d'intermédiaires (calcul du 3ème côté)

b) Comparaison avec les tâches du cours

Dans un deuxième temps, pour chacune des tâches ainsi analysées, nous avons cherché les tâches qui, dans le cours, pouvaient préparer les élèves à chaque tâche du contrôle, c'est-à-dire celles qui se rapprochaient le plus de ce qui était demandé en contrôle.

Nous avons comparé pour cela, dans les exercices du cours et du contrôle, les tâches qui portent sur la même notion nouvelle, dans des configurations similaires, ou associée avec les mêmes connaissances anciennes. Nous tenons compte aussi de la difficulté du niveau de mise en fonctionnement des propriétés sollicitées en contrôle, et regardons si cette difficulté a déjà pu être soulevée en classe, et à quelle occasion. Cela nous permet de comparer ce qui est évalué à ce qui a été fait en classe. Nous tenons évidemment compte des déroulements qui sont attachés à ces tâches en classe pour affiner la comparaison entre ce qui est demandé en contrôle et ce qui a vraiment été demandé aux élèves en classe, compte tenu de la redéfinition en sous-tâches et des aides dispensées pendant l'activité.

Nous savons que ce n'est pas uniquement en faisant des exercices similaires en classe que les apprentissages peuvent se faire sur une notion donnée. Par exemple un travail sur une autre notion à travers différents niveaux de mise en fonctionnement est peut-être transférable aux notions qui nous intéressent. L'élève sera peut-être alors capable de surmonter l'augmentation du niveau de difficulté dans d'autres cas que ceux des notions étudiées, s'il a pris l'habitude de le faire en classe. Nous essaierons donc de prendre en compte de plusieurs manières les différentes difficultés des exercices du contrôle, de même que les différents types de travail en classe.

C'est finalement le système {configuration, connaissances anciennes, connaissance nouvelle, niveau de mise en fonctionnement des propriétés, type de travail des élèves, aides dispensées par l'enseignant} qu'il nous faudra analyser pour chaque exercice fait en classe qui a pu préparer les élèves à l'un des exercices du contrôle.

Nous avons, pour chaque tâche du contrôle, rempli le tableau suivant, et mis en évidence les tâches en classe les plus proches de celle du contrôle :

	conf	**connaissances**		**NMF**	**type de travail**	**types d'aides**
		anciennes	**nouvelle**			
ex2 du contrôle	2 triangles rectangles	Pythagore	P3	calcul d'intermédiaires		
ex14 devoir maison	2 triangles rectangles	Pythagore	P3	reconnaissance des modalités d'application	à la maison puis distribution d'un corrigé détaillé	
ex12 module 2	cercle	angle inscrit	P3	introduction d'étapes	demi-classe n'a peut-être pas été abordé	individuelle

Dans un troisième temps, nous avons noté les copies des élèves, en tenant compte de leur réponse à chacune des applications considérées. Pour chaque application d'une des connaissances nouvelles attendue par l'énoncé, nous avons attribué un point si elle était juste – ou du moins si l'élève avait reconnu et appliqué correctement la propriété en question. Nous n'avons pas tenu compte d'autres types d'erreurs, pourtant sanctionnées par le professeur, mais qui ne portaient pas sur les triangles semblables et n'empêchaient pas une application correcte de cette notion nouvelle. Dans les contrôles que nous avons analysés, il n'y a pas que les connaissances nouvelles qui sont testées. Aussi, nous avons relevé les connaissances plus anciennes qui y étaient sollicitées, et en particulier nous avons regardé à quel moment de l'exercice elles intervenaient. Nous n'avons pas noté de la même façon les erreurs des élèves, selon qu'elles étaient liées aux connaissances anciennes ou nouvelles.

Par exemple, lorsqu'un exercice sur la similitude des triangles débouchait sur une équation algébrique à résoudre, il était facile de ne pas tenir compte des erreurs des élèves sur cette partie de la question, si la démonstration de la similitude était correcte. En revanche, dans le cas où l'application du théorème de Pythagore était nécessaire pour pouvoir ensuite démontrer la similitude à l'aide des longueurs, nous avons comptabilisé comme justes[17] les réponses des élèves qui calculaient de manière fausse la longueur manquante à l'aide du théorème, mais qui donnaient ensuite une application correcte de la propriété nouvelle.

Ainsi afin de nous concentrer uniquement sur les apprentissages liés à la notion nouvelle, et de différencier les erreurs dues à d'autres notions, il nous fallait repérer si les résultats erronés des élèves étaient dus à une mauvaise application du nouveau cours, ou à des lacunes sur les cours précédents. Cela justifie que dans nos analyses, nous ayons toujours pris en compte la place de la notion ancienne.

Ces résultats, complétés par la comparaison des tâches du contrôle et des {tâches+déroulements} en classe, nous permettent de savoir quel type d'organisation des savoirs en classe semble optimal pour une réussite de la majorité des élèves au contrôle. En effet, nous pouvons essayer de vérifier, lorsque le cas se présente, si la répétition d'une même tâche en classe, ou si un travail de l'élève avec un temps de recherche conséquent, ont une influence positive pour la réussite de cette même tâche en contrôle.

C'est le tableau suivant qui nous permet de synthétiser ces comparaisons et leur mise en relation avec les résultats des élèves :

[17] Nous avons tout de même signalé ce type de réponse imparfaite dans nos analyses

ex	conf	connaissances anciennes intervenant		même nveau	NMF en classe par rapport à celui du contrôle	type de travail en classe	types d'aides	résultats des élèves		
								propriété reconnue	application correcte	
		avant	après					TOTAL / abordé	TOTAL / appliqué	bons élèves / mauvais
1	la même		différente	P1	identique	pas de temps de recherche	méthode pendant tout l'exercice questions de + en + fermées	22 / 24	12 / 22	8 / 4

c) Le contrôle comme témoin des apprentissages

Nous avons choisi de mesurer les apprentissages des élèves sur la notion de triangles semblables à partir de leur réussite à un contrôle sur ce chapitre. Nous savons que ce témoin des apprentissages est très partiel, et nous essaierons de rester prudents dans nos interprétations.

En effet, ce n'est pas parce qu'un élève ne réussit pas son contrôle – ou certains des exercices du contrôle – que l'apprentissage visé n'a pas eu lieu. L'élève qui a raté son examen est peut-être trop lent, et n'a pas pu traiter toutes les questions, il est peut-être aussi stressé par la situation d'examen, et ne réalise pas les mêmes performances que dans un autre contexte. Il se peut aussi que chez cet élève, l'apprentissage se fasse dans un temps plus long : il aura peut-être assimilé la notion visée, mais trop tard pour la mobiliser lors du contrôle. On peut imaginer diverses raisons, non accessibles pour nous à partir des observations faites, pour lesquelles un élève ne sera pas performant lors d'un contrôle, sans qu'il soit passé pour autant totalement à côté de la notion sur laquelle portent les questions.

De même, ce n'est pas parce qu'un élève a bien répondu, qu'il a compris la notion visée. Il se peut qu'il ait répondu au hasard, il se peut même que la question l'ait guidé dans sa réponse (parce que c'est exactement la même qu'en cours, et que l'élève reproduit une réponse qui correspond à ce qu'il a retenu, mais pas forcément compris). Si l'évaluation donnée par le professeur est plus facile que ce qui a été donnée en classe, les bonnes réponses des élèves ne nous renseignent pas vraiment sur leurs connaissances disponibles. Il se peut aussi enfin que l'élève ait tout copié sur son voisin, pourquoi pas ! Nous n'avons pas de vidéo du contrôle, et nous nous contenterons d'espérer que ce n'est pas le cas !

Malgré tout, nous considérons que les résultats des élèves au contrôle portent bien la marque de leurs apprentissages éventuels. En particulier, si ce qui est demandé au contrôle est plus difficile que ce qui a été fait en classe, et nécessite une réorganisation des connaissances de l'élève, nous pouvons tirer quelques conséquences des réussites aux questions du contrôle. Les adaptations que l'élève réalise correctement nous renseignent sur ses connaissances – nouvelles ici – et sur son aptitude à les faire travailler dans un contexte qui peut être plus ou moins éloigné de ceux qu'il a déjà rencontré.

Bien entendu, tout va donc dépendre de l'énoncé de contrôle proposé par le professeur à sa classe. En choisissant de ne pas intervenir à ce niveau, nous avons pris le risque de ne pas pouvoir mettre en relation les apprentissages des élèves et leur réussite à certaines questions du contrôle.

d) Les recherches en didactique des mathématiques sur le contrôle

Une recherche sur le site PUBLIMATH[18] en utilisant le mot clef "*contrôle*" ou "évaluation" nous donne de nombreux résultats. Il faudra bien entendu faire le tri entre les différents sens de ces mots ; nous nous intéressons seulement ici aux recherches sur l'évaluation des élèves par un contrôle. Au total, le moteur de recherche nous a renvoyé plus de 300 fiches, dont très peu sont pertinentes, au sens de notre requête :

Des recherches se sont penchées sur ce qui est évalué et sur la façon de le faire, sur les atouts et limites de différents systèmes d'évaluation, et aussi sur la formation des professeurs à l'évaluation de leurs élèves (Roegiers, 2004).

Nous avons utilisé le devoir donné par le professeur comme un moyen de nous renseigner sur les connaissances des élèves sur une notion donnée et à un moment donné. Nous avons conscience des limites de ce système de contrôle des connaissances, qui reste cependant le seul que nous ayons eu à notre disposition pour cette étude à assez grande échelle.

[18] La base de données PUBLIMATH (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/) est le résultat d'une collaboration entre les IREM, l'APMEP et l'ARDM. Elle présente un ensemble de notices sur des publications en langue française traitant de mathématiques et de leur enseignement. PUBLIMATH permet par exemple de consulter des sommaires de revues (*bulletin de l'APMEP, Repères-IREM, l'Ouvert, le Petit Vert, Hypercube, Grand N, Petit x, bulletin de l'ARDM, PLOT)*

5) Méthodologie pour l'analyse des exercices des manuels

Nous avons analysé les quelques centaines d'exercices que nous avons trouvés dans 12 manuels de 2^{nde}, dans le chapitre sur les triangles semblables. Pour chaque exercice, nous avons relevé les mêmes indices que pour les analyses de tâches en classe ou en contrôle, que nous avons ensuite synthétisés et comparés à l'aide d'un logiciel de traitement de données. Ces analyses nous donnent une plus large palette de ce qui peut être proposé aux élèves sur la notion de triangles semblables, et nous permettent éventuellement de caractériser les différents manuels disponibles sur le marché.

D'autre part, pour nous convaincre de l'intérêt des triangles semblables en tant qu'outil pour résoudre des problèmes mathématiques, nous nous sommes demandé si les exercices proposés dans les manuels sur ce chapitre pouvaient être résolus par d'autres moyens, voire même par un logiciel de géométrie dynamique, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir les cas de similitude. Nous avons donc analysé les exercices proposés sous cet angle.

6) Méthodologie pour l'analyse des pratiques et pour la comparaison entre les professeurs

a) L'enseignement en temps qu'organisation du savoir

Nous analysons les pratiques du professeur dans sa classe, en tant que médiateur entre le savoir à enseigner et les élèves apprenant. Aussi, nous analysons chaque geste du professeur qui nous paraît significatif par rapport aux apprentissages éventuels des élèves.

Nous prenons en compte les choix du professeur pour introduire la notion nouvelle enseignée : par quelles activités, en lien avec quelles autres notions et avec quelles révisions effectuées sur les connaissances anciennes ?

Nous tenons compte aussi du cours dispensé par le professeur : quelles définitions et propriétés sont données, dans quel ordre et avec quel vocabulaire ? Quelles démonstrations sont effectuées dans le cours et quels théorèmes sont admis ?

Nous tenons compte surtout du choix d'exercices fait par le professeur : quel type de tâche est donnée à faire en classe, avec quelle forme de travail ? Y a-t-il une répétition, une évolution dans ces types de tâche au fur et à mesure que le chapitre avance? Quels types d'exercices sont privilégiés pour les devoirs à la maison ? Plutôt des "gammes" pour pratiquer les techniques de base ou bien des exercices plus longs qui demandent une certaine recherche, trop coûteuse en temps pour être envisagée en classe ?

Enfin, quel type d'exercice est donné en contrôle ? Quel est alors le rapport entre ce qui a été fait en cours et ce qui est évalué ?

En plus du choix des tâches données aux élèves, nous analysons la manière dont le professeur organise les activités en classe : quelles formes de travail, quelles interventions, quelles corrections, quelles mises en commun ? Comment s'articulent les moments de cours et les moments d'exercices ?

Tous ces éléments nous paraissent décisifs dans la construction des apprentissages des élèves, nous avons donc choisi de les analyser en détail pour chaque séance et chaque professeur observé.

b) L'enseignement en temps que métier

Nous faisons aussi l'hypothèse que les choix de l'enseignant sont aussi dictés par des contraintes liées au métier d'enseignant, et qui réduisent le champ des possibilités qui s'offrent à celui-ci, à travers les savoirs imposés par les programmes scolaires, mais aussi suivant le niveau de l'établissement et de la classe dans lesquels il enseigne. Ces contraintes vont influer sur les pratiques des professeurs. Nous en avons déjà détaillé les différentes composantes, pour expliciter notre cadre théorique.

En particulier, une même notion ne sera pas enseignée de la même manière par des professeurs différents. Les activités proposées – leur nombre, leur ordre dans le programme de l'année ou de la séance, leur déroulement effectif, leur degré de difficulté – sont influencées par ce que le professeur pense du niveau de sa classe et par la progression sur l'année qu'il a adoptée, ou encore par l'assurance qu'il a ou non acquise dans l'enseignement de telle ou telle notion, mais aussi peut-être par les compétences des élèves qu'il souhaite évaluer plus tard en contrôle (éventuellement lors d'un contrôle commun). C'est donc une comparaison interne que nous devons faire à chaque fois.

De plus, nous pouvons nous demander comment différents professeurs vont traiter un même chapitre : par exemple, à quel moment de l'année, et quel lien vont-ils établir avec d'autres notions ? Quels types d'applications vont-ils privilégier ? Mais aussi : que vont-ils évaluer dans un contrôle sur ce chapitre ?

Nous pensons que ces différents choix peuvent avoir diverses influences sur les apprentissages des élèves, influences dont nous espérons mesurer les effets, grâce à leur réussite – ou à leur échec – au contrôle. Bien entendu, il nous faudra prendre en compte les différents types d'établissements et les niveaux hétérogènes des élèves et rester prudents dans nos comparaisons éventuelles et dans les interprétations qui en découlent.

Nous faisons l'hypothèse de la stabilité des pratiques que nous avons observées, pour un même professeur. Etant limités à des observations sur un temps court, nous ne pouvons savoir si tous les chapitres ressemblent à celui sur les triangles semblables, en termes d'organisation des enseignements. Mais nous nous appuyons sur des résultats de recherche qui ont montré que les pratiques des enseignants sont effectivement relativement stables (Robert & Rogalski, 2002).

En partant de ce principe, nous nous demandons alors ce qui est "robuste" pour certains types de tâches, si on considère que les adaptations sont souvent traitées de la même façon en classe, par exemple dans le même ordre, avec la même progression, et avec les mêmes autonomies – ou l'absence d'autonomie – pour les élèves. Nous nous interrogeons sur l'influence d'un type de travail fréquent – voire systématique – d'une même tâche sur les apprentissages des élèves. Par exemple, lors d'un exercice nécessitant l'introduction d'étapes, qu'est-ce qui résiste – subsiste – à la gestion choisie par le professeur ? Y a-t-il des gestes mathématiques – tels que la structuration d'une résolution en étapes – qui seront appris quoi qu'il se passe en classe ?

Pour compléter nos données, nous avions envisagé un questionnaire pour interroger les professeurs sur leurs pratiques. Cela nous aurait renseignés sur les particularités du chapitre observé par rapport aux autres chapitres, en ce qui concerne les types de travail en classe ou à la maison, ou encore sur la nature de ce qui est évalué par le contrôle. Ce questionnaire nous aurait peut-être permis de déterminer si les éléments qui émergeaient de nos analyses étaient bien des constantes dans les pratiques de ces enseignants.

Ayant gardé le contact avec les enseignants filmés, nous avons pu leur poser certaines de ces questions, au fur et à mesure de nos analyses, au moment où elles s'avéraient pertinentes, et nous n'avons donc pas eu recours à un tel questionnaire.

7) Méthodologie pour la description raisonnée

Pour compléter ce travail, et parce qu'il était dommage de se limiter à trois professeurs analysés seulement, nous avons demandé à d'autres enseignants de réaliser une description de leur enseignement sur ce chapitre, comprenant les différentes tâches proposées en cours et à la maison et leur déroulement, ainsi que l'énoncé du contrôle final. Nous avons trouvé des enseignants de 2nde qui voulaient bien participer à cette recherche, et nous leur avons demandé de nous fournir certaines informations.

Pour ce faire, et pour recueillir des données qui soient facilement utilisables pour nous, nous leur avons donné un tableau à remplir, à l'issue de chaque séance portant sur le chapitre des triangles semblables. Ce tableau[19] a été construit à l'aide de nos grilles d'analyse, et doit nous apporter , sans effectuer de vidéo, les données nécessaires à nos analyses de tâches, de déroulement et à notre comparaison avec le contrôle.

Ces données se sont avérées difficiles à utiliser, dans la mesure où il nous manquait les copies de contrôle des élèves pour essayer de tirer des conclusions sur les apprentissages. Cela nous permet tout de même d'élargir notre recherche et d'obtenir sur ce chapitre un tableau assez riche et complet des possibilités et alternatives qui s'offrent aux professeurs.

A la suite de la publication de certains résultats partiels de notre recherche, un travail de DEA a été mené – et est toujours en cours – reprenant notre cadre théorique et notre méthodologie, pour relever et analyser des séances en classe sur tout le chapitre des triangles semblables. Grâce à cette étude, comportant cette fois les copies de contrôle des élèves, nous avons pu augmenter le nombre de nos observations et confronter nos résultats à ces nouvelles données.

L'utilisation répétée de la méthodologie établie au départ, enrichie par les conclusions tirées de nos premiers résultats, nous a permis de construire une grille d'évaluation et de comparaison des pratiques qui s'avère tout à fait performante.

8) Méthodologie pour l'utilisation de la vidéo dans l'analyse des pratiques : un outil récent en didactique

Nous utilisons pour cette recherche des vidéos obtenues à partir d'une caméra qui nous permet de filmer les séances en classe. La caméra est posée sur une table au fond de la salle. L'objectif est dirigé vers le tableau sous un angle fixe. C'est le professeur qui enclenche lui-même le démarrage et l'arrêt du film, et qui cadre la prise de vue - sauf dans l'un des cas où le professeur a exigé la présence du chercheur.

La perturbation du cours est ainsi minimisée : il n'y a pas d'intrus dans la classe, et la caméra, située dans le dos des élèves, n'est pas visible pour eux pendant la séance. Pour certains élèves cependant, cela renforce leur timidité à passer au tableau, pour d'autres au contraire, c'est

[19] Voir ANNEXES : Tableau pour la description raisonnée

l'occasion de prendre la parole et de se faire remarquer. Les recherches qui ont déjà été menées à l'aide de cet outil ont fait l'hypothèse que la caméra ne perturbait pas – ou pas durablement – les séances de cours filmées, et que les bandes enregistrées rendaient donc bien compte de séances de cours "ordinaires". Cette hypothèse a été confirmée par les professeurs filmés.

Pour ces professeurs, on pourrait cependant imaginer que c'est une incitation à préparer le cours avec plus de soin, mais pas de prendre le risque de changer du tout au tout leurs pratiques habituelles, car celles-ci sont relativement stables, pour un enseignant donné.

La vidéo nous a permis de faire des observations très riches dans cette étude, mais c'est un outil très récent pour la recherche en didactique des mathématiques[20] en France. De plus en plus de recherches en didactiques reposent sur des données filmées. Une recherche sur le site PUBLIMATH[21] en utilisant le mot clef "vidéo" nous donne seulement dix résultats pertinents. Il y a aussi quelques résultats qui concernent des articles sur des recherches sur l'utilisation du vidéo-projecteur, ce qui n'est pas notre propos ici : nous voulons faire l'inventaire des travaux dans lesquels la vidéo a été un outil méthodologique mis en avant par le chercheur pour son efficacité. Les articles répertoriés sur le site portent sur des recherches sur les pratiques enseignantes, en vue, pour la plupart, d'une formation.

Nous n'avons trouvé aucun article discutant l'usage de la vidéo pour les recherches en didactiques des mathématiques, et dont nous aurions pu nous inspirer pour justifier l'utilisation que nous en avons faite.

Des recherches sont cependant en cours sur ce sujet[22] et examinent certaines spécificités de l'analyse de films et de transcriptions, et leur apport pour la recherche en didactique.

---

[20] Mais c'est un outil plus ancien pour les sciences de l'éducation
[21] *http://publimath.irem.univ-mrs.fr/*
[22] Cf. séminaire national d'octobre 2005, exposé des travaux en cours de SENSEVY B. intitulé *"L'analyse de films de séances de classe et de transcripts associés dans une approche didactique"*

Nous avons détaillé les éléments de méthodologie sur lesquels repose notre recherche. Nous allons maintenant appliquer cette démarche aux données que nous avons recueillies : nous étudierons la notion de triangles semblables d'un point de vue historique, en mathématiques et dans les programmes (chapitre III), puis nous donnerons l'analyse des tâches et déroulements dans les classes observées et essaierons d'en déduire des liens avec les apprentissages éventuels des élèves sur cette notion (chapitres IV, V et VI), nous réalisera aussi une comparaison des pratiques des enseignants (chapitre V), et enfin nous commenterons les cours et exercices de ce chapitre trouvés dans les manuels (chapitre VII).

Une synthèse de ces analyses sera donnée au chapitre VIII

III) Analyse de la notion de triangles semblables et de triangles isométriques

Même si la notion de triangles semblables faisait partie – un peu par hasard – des connaissances étudiées lors de nos premières observations, le choix de conserver cette notion dans cette thèse n'est pas innocent. Il s'agit tout d'abord d'un chapitre relativement court, ce qui nous permet assez facilement de réaliser des observations sur l'ensemble des séances. D'autre part, c'est une notion mathématique assez complexe, dont la présence dans les programmes scolaires a évolué ces dernières années, et qui nous a paru assez riche pour présenter à la fois des difficultés pour les professeurs dans leurs choix d'enseignements[23], mais aussi des difficultés d'apprentissage pour les élèves. Enfin, les élèves n'entendent parler des triangles semblables qu'en classe de 2nde, ce qui nous permet de circonscrire leur rencontre avec cette notion aux seules séances observées.

Nous ne savons pas comment ni à quel point le type de notion va jouer sur les apprentissages des élèves, mais nous pouvons émettre quelques hypothèses sur ces influences éventuelles à l'aide d'une analyse approfondie de la notion.

1) Analyse épistémologique ……………………………………………………………..60

a) Des triangles isométriques aux triangles semblables en géométrie euclidienne............. 61
b) De la géométrie d'Euclide aux géométries actuelles 69
c) En géométrie affine 70
d) Le point de vue complexe 74
e) La géométrie enseignée au collège 76

2) Analyse des programmes scolaires……………………………………………………... 78

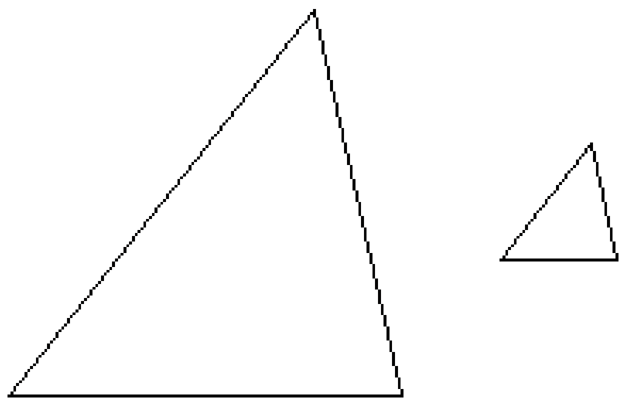
a) L'évolution des programmes jusqu'en 2000.. 78
b) Analyse de la littérature professionnelle au moment de la réintroduction des cas d'égalité 84
c) Lecture du programme 2000 et commentaires 86
d) Les difficultés liées à la géométrie : la continuité collège - lycée 90
e) Programme des années suivantes : les conséquences du manque de continuité............ 92
f) Obstacles liés à la notion et difficultés éventuelles engendrées pour les élèves 93

[23] Et de plus, les professeurs ont dû y réfléchir très récemment pour s'adapter au retour des triangles semblables dans les programmes

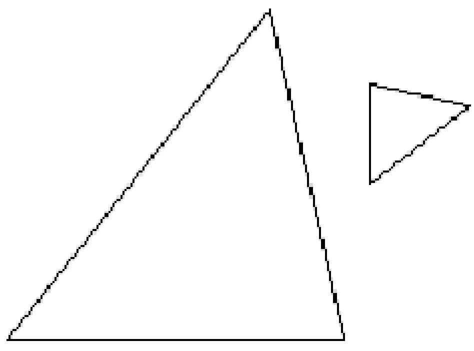
1) Analyse épistémologique

L'étude des triangles a longtemps constitué un des chapitres essentiels de la géométrie élémentaire. Cependant, il y a plusieurs manières mathématiques d'envisager les triangles semblables, et donc plusieurs façons d'introduire cette notion nouvelle en classe.

On peut dire que les triangles semblables sont des *triangles de même forme* : cela signifie qu'ils ont les mêmes angles, mais qu'ils ont des dimensions différentes.:



Cela peut sembler assez visuel, mais ce n'est pas toujours si évident, comme on peut le voir dans certaines configurations :



Nous discuterons d'ailleurs plus loin le rôle de la figure dans ce chapitre de géométrie.

Pour analyser cette notion, nous devons partir de l'analyse épistémologique des triangles isométriques pour en déduire celle des triangles semblables. En effet, même si les triangles isométriques peuvent être vus comme un cas particulier de triangles de même forme, c'est à partir de cette notion qu'a été énoncée celle des triangles semblables en mathématiques.

Nous allons donc étudier, à travers l'histoire des mathématiques, la création et l'évolution de la notion de triangles isométriques et semblables, pour comprendre à quoi servent les triangles semblables, comment on pourrait les introduire en classe, et comment on peut les mettre en fonctionnement avec d'autres notions mathématiques. Nous voulons ainsi déterminer quels sont les enjeux de cette notion pour les mathématiques et aussi pour l'enseignement.

a) Des triangles isométriques aux triangles semblables en géométrie euclidienne[24]

On s'accorde à dire que C'est Euclide[25], vers le IIIème siècle avant notre ère, qui a posé les bases de la géométrie dans son ouvrage[26] "*Les Eléments*", en treize tomes[27]. Les quatre premiers volumes sont consacrés à la géométrie plane, les livres suivants traitent des fractions, de l'arithmétique et des nombres irrationnels. Le livre V expose une théorie des proportions, et le livre VI expose l'application de cette théorie aux figures semblables. Les derniers livres portent sur les calculs d'aire et de volume des figures de l'espace (mais pas pour la sphère). Les treize livres sont en fait une suite de propositions – théorèmes à démontrer ou problèmes à résoudre – dont l'énoncé est suivi d'une preuve.

Pendant plus de 2000 ans par la suite, les Eléments constituent un ouvrage de référence, souvent traduit et commenté. La première traduction latine date de 1533. La rigueur et le respect du texte original ne sont pas toujours de mise, jusqu'à la découverte d'un manuscrit au XIXème siècle.

Nous allons donner maintenant un aperçu de la géométrie d'Euclide, que nous considérons indispensable pour introduire la notion de triangles semblables. Ces éléments sont aussi sous-jacents dans toute la géométrie des figures planes enseignée au collège, bien qu'Euclide ne soit pas mentionné.

---

[24] Voir les sites internet www.math93.com , www.cabri.net, ou encore serge.mehl.free.fr

[25] On ne dispose pas de beaucoup de renseignements sur Euclide, on pense qu'il s'établit à Alexandrie après des études à Athènes, mais les dates sont imprécises. De plus, la diversité des styles de rédactions laisse penser à certains historiens qu'il n'était pas seul à rédiger les Eléments.

[26] Les Eléments regrouperaient en fait des travaux plus anciens, d'Eudoxe et Théétète, compilés par Euclide, qui en auraient perfectionné les démonstrations, pour en faire une synthèse des connaissances géométriques de l'Antiquité.

[27] Il existerait deux livres supplémentaires, mais ajoutés plus tard par d'autres mathématiciens

Il aurait pu être intéressant pour nous d'envisager une introduction des triangles semblables en classe à travers une présentation des travaux d'Euclide, mais aucun des manuels étudiés ou des professeurs observés n'a choisi cette approche ; nous ne nous pencherons donc pas plus sur le sujet.

Dans le premier livre, Euclide introduit 35 définitions, dont voici quelques-unes, telles que la définition d'un point, d'une droite, d'un plan et des différents types de figures planes[28] :

- un point est ce dont la partie est nulle
- une ligne est une longueur sans largeur
- les figures trilatères sont terminées par trois droites

La dernière définition est importante pour la suite de la théorie euclidienne, comme nous allons le voir :

- les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre

Euclide introduit ensuite cinq *postulats* relatifs à la géométrie, qu'il appelle des "*demandes".*

Le cinquième postulat est souvent appelé *"le postulat d'Euclide"* – ou "*axiome des parallèles"* - et a fait l'objet de nombreuses recherches et critiques. Par la suite, ce postulat s'énoncera plutôt sous la forme : "*par un point il passe une unique droite parallèle à une droite donnée".*

On trouve parfois dans certaines traductions un sixième postulat suivant lequel "*deux droites ne peuvent enfermer un espace"*, mais il s'agirait plutôt d'un ajout ultérieur des mathématiciens arabes, qui l'utilisèrent pour démontrer avec plus de rigueur le premier des cas d'égalité.

Il introduit enfin neuf *axiomes*[29] ou *notions communes*. En particulier, le huitième axiome est important pour pouvoir envisager par la suite les cas d'égalité :

- les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles

[28] voir ANNEXES : les définitions, postulats et axiomes de la géométrie euclidienne.
[29] La différence entre *postulat* et *axiome* tient de leur racine respective : *postulat* vient du latin *postulare*, c'est à dire *demander,* c'est ce qu'on demande au lecteur d'admettre ; quant au mot axiome, il provient du grec *axioma* qui signifie "j'estime", il s'agit donc de quelque-chose que l'on tient pour vrai. Un axiome serait alors un postulat un peu plus évident.

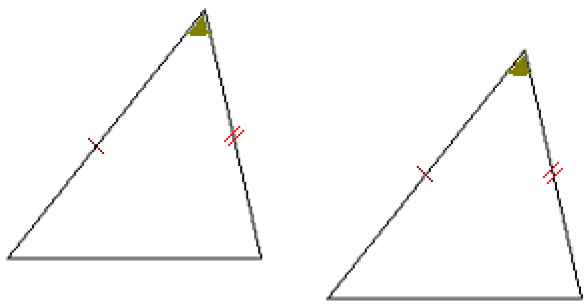
Dans son article, Jean Luc Chabert (1990) remarque que l'on peut l'interpréter de deux façons : soit il *justifie* a priori les cas d'égalité par superposition, soit il *définit* l'égalité elle-même par superposition. Dans les deux cas, poursuit-il :

> *"Quelle que soit l'interprétation choisie, comment définir la superposabilité – la coïncidence – suivant Euclide ? Par un déplacement sans doute. Et le déplacement, comment le déterminer ? Par une transformation qui conserve les formes, celles des solides en particulier, donc qui conservent les longueurs. Et la conservation des longueurs ? par leur égalité. Et cette égalité ? Par la superposabilité ! La boucle est bouclée.".*

Cette notion délicate d'égalité des longueurs par superposabilité sera donc reprise et commentée par la suite.

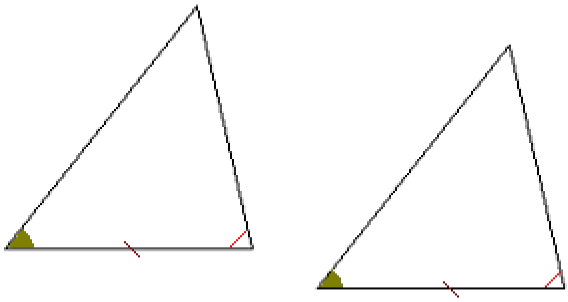
Ensuite, toujours dans le livre I Euclide, donne quarante huit *propositions,* dont une majorité ne s'appuient pas sur le cinquième postulat, et en particulier celles qui nous intéressent ici, qui établissent les *cas d'égalité des triangles*, à l'origine de nos triangles isométriques :

Livre I, Proposition 4 : *premier cas d'égalité :*
Si deux triangles ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, alors ces deux triangles sont égaux *(superposables)*

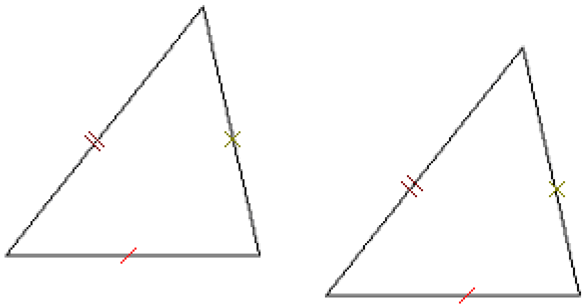


Sur cette figure, les triangles sont dans une position où leurs côtés sont parallèles, rendant facile le repérage des sommets homologues, mais ce n'est pas toujours le cas.

Livre I, Proposition 8 : se*cond cas d'égalité* **:** Si deux triangles ont un côté égal, compris entre deux angles égaux chacun à chacun, alors ces deux triangles sont égaux.



Livre I, Proposition 26 : *troisième cas d'égalité :*Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, ces deux triangles sont égaux.



Pour démontrer le premier cas d'égalité, Euclide fait appel au mouvement : il conclut à l'égalité de deux objets mathématiques quand, ayant transporté l'un sur l'autre, ils coïncident.

Voilà la démonstration qu'il en fait, tirée d'une traduction dans un ouvrage ultérieur :

"Transportons le claque du triangle A'B'C' et faisons coïncider B'C' avec son égal BC en amenant B' en B, C' en C et A' du même côté de BC que le point A. L'angle C'Bx' coïncide alors avec son égal CBx et de même B'C'y' avec son égal BCy. Le point A' se place donc à la fois sur BX et Cy, soit au point A. Les deux triangles coïncident"

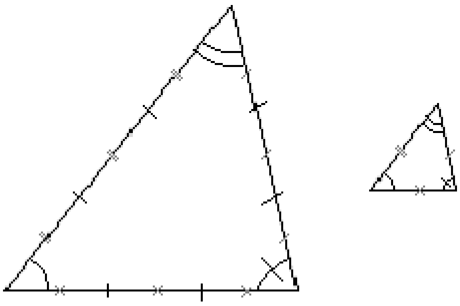
Pour démontrer les deux autres cas d'égalités, il utilise ensuite le premier cas d'égalité.

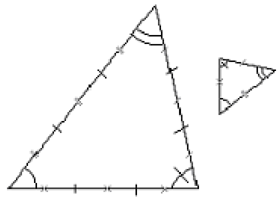
L'utilisation du mouvement dans la démonstration du premier cas d'égalité d'Euclide – et donc dans les cas de similitude – est beaucoup critiquée par certains commentateurs de l'ouvrage d'Euclide[30]. En effet, les mathématiques ne sont alors pas considérées comme une science des solides en mouvement, et par conséquent, une telle démonstration n'y a pas sa place. Il ne s'agit pas non plus d'une théorie utilisant les *transformations* car celles-ci sont inexistantes dans la géométrie euclidienne, où elles n'ont pas de place explicite.

Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, l'espace géométrique devient enfin le cadre idéal pour étudier le mouvement, à travers la mécanique, mais c'est seulement du XIX$^{\text{ème}}$ siècle que date la notion de transformation, qui devient alors un objet d'étude.

A partir des cas d'égalité, Euclide construit les triangles de même forme, mais pas de mêmes dimensions, et établit des rapports de proportionnalité entre leurs côtés[31]. Ce sont les *triangles semblables.* La définition donnée par Euclide dans le livre VI est la suivante :

"Des triangles semblables sont des triangles ayant 3 angles égaux 2 à 2 et 3 côtés respectivement proportionnels"



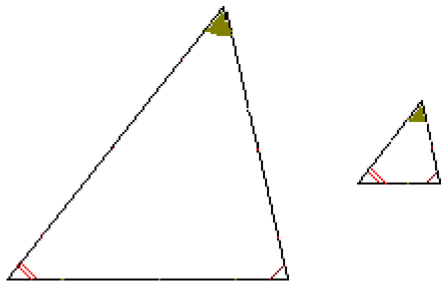


On peut aussi envisager une figure où cette propriété est "moins visuelle", telle que les côtés des triangles ne soient pas parallèles deux à deux, comme c'est généralement le cas dans les exercices que nous avons analysés.

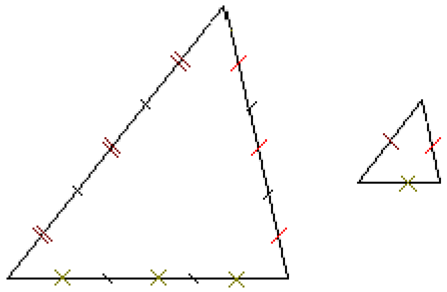
[30] En particulier Omar al-Khayam (XI$^{\text{ème}}$ siècle)
[31] (Livre VI)

Comme pour les triangles isométriques, il existe des conditions de similitude, équivalentes à la définition énoncée :

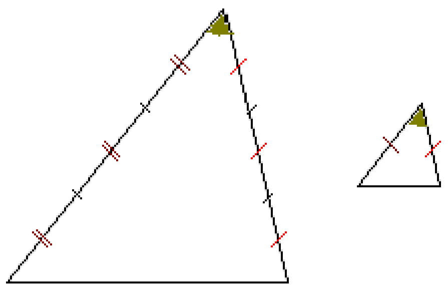
- Deux triangles ayant 3 angles égaux[32] chacun à chacun sont semblables



- Deux triangles ayant 3 côtés proportionnels sont semblables[33]



- Deux triangles ayant 2 côtés proportionnels et un angle égal bien choisi sont semblables



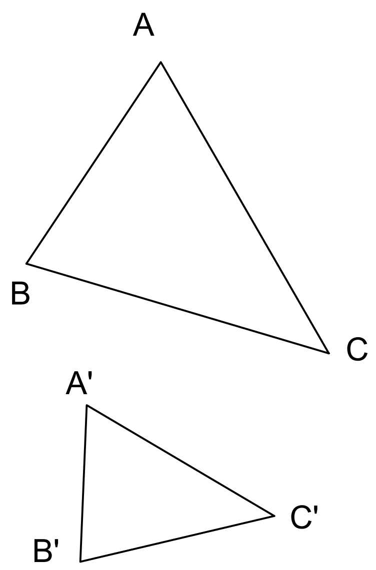
[32] Pour le 1er cas, il suffira en réalité de deux angles égaux, les 3èmes étant alors identiques puisque la somme vaut 180°

[33] Ici on a dessiné des triangles homothétiques, dans un rapport de proportionnalité égal à 1/3

Les caractérisations de l'objet géométrique "triangles semblables" sont numériques (égalités de mesures d'angle et de longueurs de côtés), elles portent donc en elles-mêmes un changement de cadre. Celui-ci peut déjà être envisagé comme un obstacle potentiel pour les élèves.

Euclide démontre les équivalences entre les cas de similitude en utilisant les cas d'égalité : une fois de plus, il fait appel – indirectement – au mouvement. Pour démontrer l'équivalence entre les deux premiers cas, il déplace l'un des triangles sur le deuxième, de manière à faire coïncider l'un des sommets, et deux des côtés, il montre qu'on obtient alors une configuration de Thalès, qui permet de montrer la proportionnalité des côtés des deux triangles.

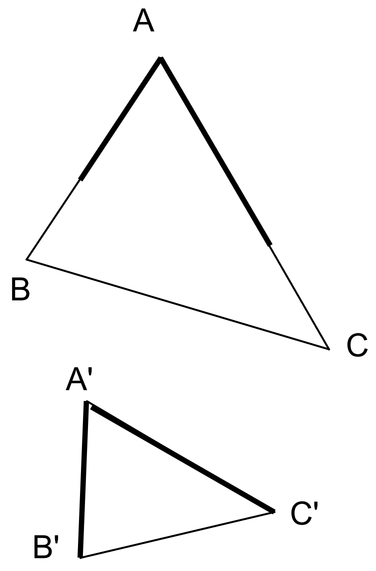
Les schémas suivants détaillent les différentes étapes de cette démonstration[34] :



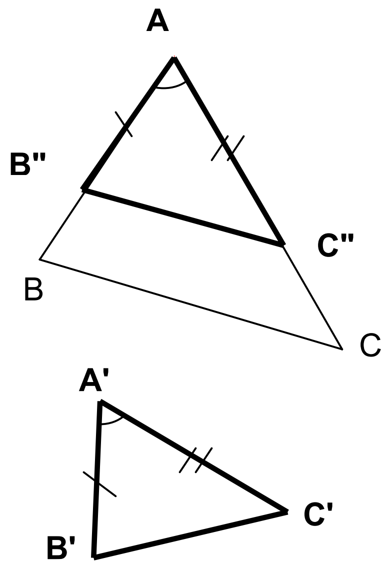
Soient 2 triangles dont les angles sont égaux 2 à 2

(on suppose ici $A'B' \leq AB$)

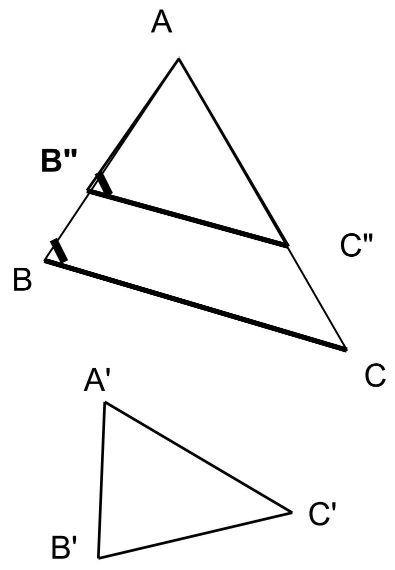
[34] Cette démonstration peut se faire sans qu'il y soit question de mouvement, notamment à l'aide des transformations, qui n'existent pas encore dans la géométrie euclidienne, et qui permettent de décrire le déplacement qui transporte l'un des triangles sur l'autre.



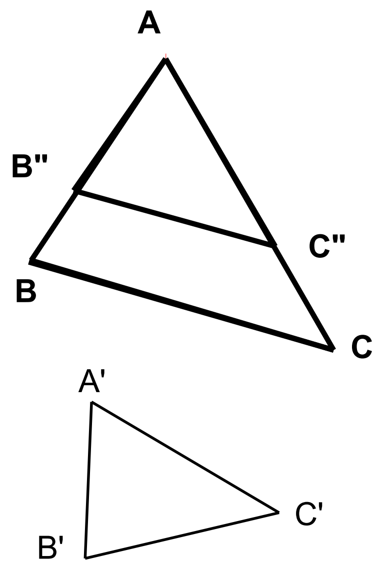
On construit B’’ et C’’ sur [AB] et [AC]
tels que AB’’ = A’B’ et AC’’ = A’C’



Les triangles A'B'C' et AB"C" sont
isométriques (3ème cas d'égalité),
donc B'C' = B"C"



Les droites (B"C") et (BC) sont parallèles
(angles égaux correspondants)



Les triangles sont en configuration de Thalès,
donc les côtés des deux triangles sont
proportionnels

Inversement, si les triangles ont des côtés proportionnels, on peut construire un triangle isométrique à l'un d'eux en configuration de Thalès avec l'autre, et, d'après la réciproque de la propriété, le parallélisme des côtés nous donne les égalités de 2 des angles et donc du 3ème. Pour démontrer l'équivalence avec le 3ème cas, c'est tout aussi simple, en s'appuyant encore sur les cas d'égalité et sur la propriété de Thalès. Nous détaillons en annexe les démonstrations d'équivalence entre tous les cas de similitude35.

b) De la géométrie d'Euclide aux géométries actuelles

Les mathématiciens Playfair, Pasch (1882), et enfin Hilbert (1899), se sont employé à compléter l'axiomatique euclidienne, au sein d'un grand mouvement d'éclaircissement des fondements des mathématiques. Il s'agit de réduire le nombre de définitions et d'axiomes au minimum, mais tout en s'assurant que les propriétés et démonstrations qui en découlent ne dépendent que des relations entre ces définitions et ces axiomes, et ne sont sujets à aucune interprétation. Pour Gilbert Arsac (1997) :

> *"l'histoire des débats sur les fondements de la géométrie [peut être interprétée] comme l'histoire d'une défiance de plus en plus grande vis à vis des vérités appuyées sur l'intuition de l'espace, mais qui aboutit à la constatation que l'on ne peut pas s'en passer totalement".*

Dans *"les fondements de la géométrie"*, en 1871, Hilbert reprend les idées d'Euclide pour reconstruire les mathématiques sur des fondements axiomatiques. Il crée un formalisme rigoureux qui permet de réaliser les démonstrations sans recours à la langue courante, mais uniquement à l'aide du symbolisme mis en place et de la logique.

Pour ce faire, il définit tout d'abord les points, droites et plans de la manière suivante :

> *"Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des points, nous les désignons par des majuscules A, B, C, … ; nous nommons droites les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c… ; nous appelons plans les choses du troisième système et nous les désignons par les caractères grecs."*

[35] Voir ANNEXES : Démonstration des équivalences entre les cas de similitude

Il introduit 23 axiomes répartis suivant 5 types de relation entre les points, droites et plans : l'appartenance, l'ordre, la congruence, le parallélisme et la continuité. Le raisonnement hilbertien porte uniquement sur ces mots et leur syntaxe.

"Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent" ; la description exacte et appropriée au but mathématique de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie. On peut classer ces axiomes de la géométrie en cinq groupes ; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition."

Les cinq axiomes de congruence définissent ainsi la notion de déplacement. À la place du principe de superposition, Hilbert propose deux axiomes de report et un théorème de congruence. Ainsi, la correspondance entre deux figures ne dépend plus du mouvement.

Malgré tous ces remaniements, voire même grâce à eux, les fondements d'Euclide restent corrects, et sa géométrie n'a pas été démentie jusqu'à nos jours, et elle reste présente – ou sous jacente – dans les enseignements de mathématiques du collège et du lycée actuels. L'évolution des mathématiques au cours des derniers siècles a entraîné des changements dans les programmes scolaires liés à cette matière, comme nous allons le voir plus loin.

c) En géométrie affine

Ce dernier point de vue sur les triangles consiste à exhiber la transformation qui permet de passer d'une figure à une autre qui lui est égale - ou semblable. Pour ce faire, on se place en algèbre linéaire ou en géométrie affine. Nous rappelons en annexe ce qu'est un espace affine, et comment y définir une distance euclidienne. On introduit ensuite les transformations qui permettent le passage d'un triangle à l'autre.

Pour les triangles identiques, il s'agit des isométries :

Dans un espace affine euclidien, une application f de E dans lui-même est une isométrie affine si la distance entre deux points de E est la même que la distance entre leurs images par f.

Les isométries conservent les distances entre les points. Il en découle naturellement la définition de *triangles isométriques* :

Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. Cette isométrie est alors unique

L'isométrie conserve les distances, mais donc aussi les alignements, les angles, les parallèles… C'est donc un cas très particulier de transformation. Si on considère une transformation qui conserve cette fois-ci, non pas les distances, mais uniquement les angles, on obtient une transformation qui permet de passer d'une figure à une autre de même forme. Il s'agit d'une *similitude :*

Une application f d'un espace euclidien E sur un espace euclidien F est une similitude affine si elle multiplie les distances par un réel k strictement positif, appelé rapport de similitude. Ainsi pour tous points M et N de E on a : f(M)f(N) = k x MN.

Par une telle transformation, les longueurs de la figure initiale sont multipliées par le rapport de similitude k.

Cela nous donne une nouvelle définition pour les triangles semblables :

Deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude de rapport non nul.

Cette similitude est alors unique.

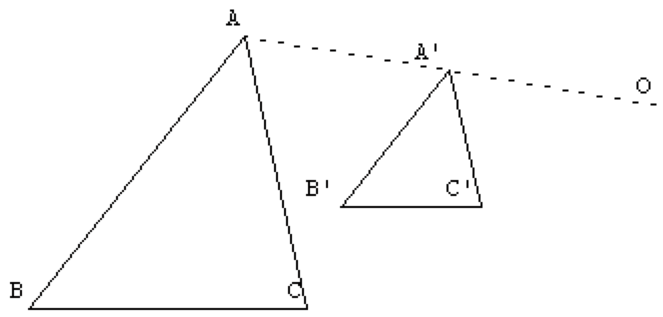
Nous donnons en annexe la démonstration de l'équivalence avec les cas de similitude donnés précédemment[36] Notons qu'il s'agit cette fois-ci d'une caractéristique géométrique (pas de mesure) et ensembliste (unicité), ce qui la distingue fortement de la première approche considérée.

Nous considérerons par la suite – en guise d'exemple et pour illustrer de manière plus visuelle cette caractérisation – l'une des similitudes les plus simples, par laquelle une droite a pour image une droite parallèle ; il s'agit de l'homothétie :

---

[36] voir ANNEXES : démonstration de l'équivalence entre les deux définitions

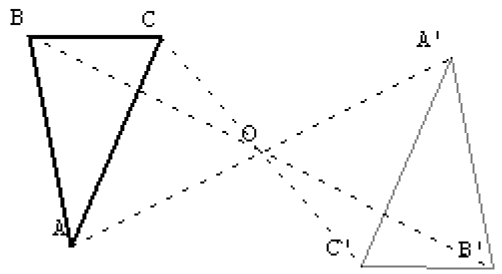
Une homothétie h de centre O et de rapport K est une transformation telle que si A' est l'image de A par h, alors on a OA' = k OA.



Grâce à cette définition, on peut énoncer un critère d'unicité de la décomposition d'une similitude :

Une similitude de rapport ≠ 1 peut se décomposer de manière unique et commutative en un produit d'une isométrie par une homothétie de rapport positif

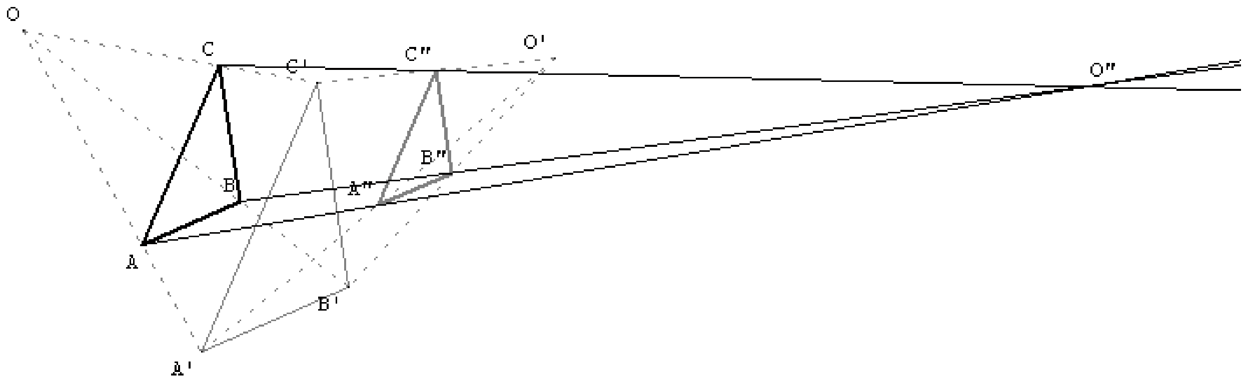
- La symétrie centrale peut être considérée comme une homothétie de rapport (-1)



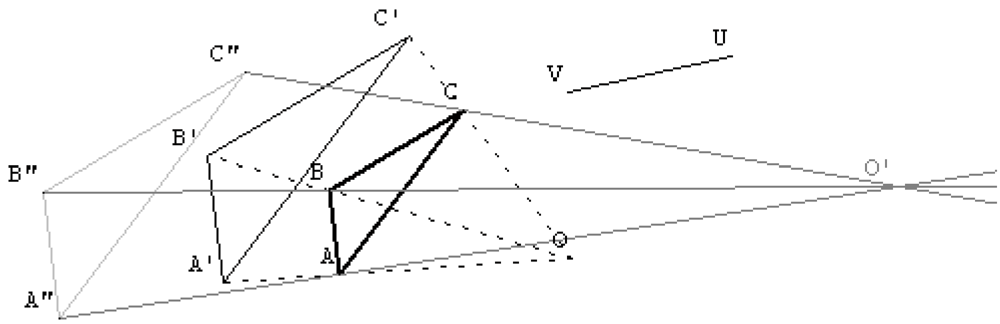
Si on compose une homothétie avec quelques-unes des différentes isométries que nous connaissons, on obtient différentes similitudes :

- La composée de deux homothéties est une homothétie, dont le centre et le rapport dépendent des positions des deux centres et des rapports des homothéties initiales[37] (si le produit des rapports est différent de 1)

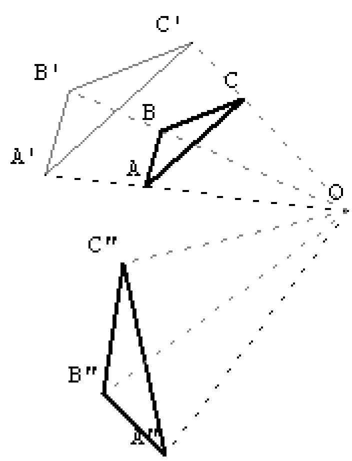
[37] Ici on a pris les rapports successifs 1.5 et 0.5



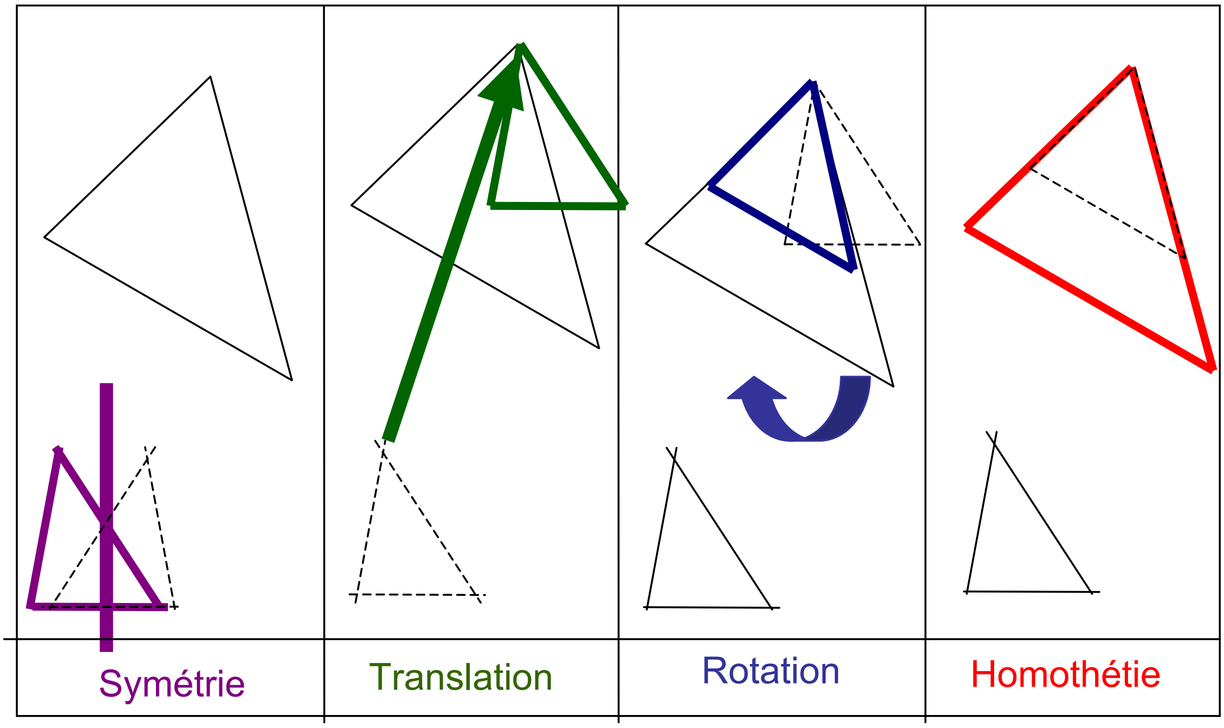
- Si on compose une homothétie et une translation, on obtient une nouvelle homothétie, dont le rapport reste inchangé, mais dont le centre est différent.



- Si on compose une homothétie avec une rotation de même centre, on obtient une similitude caractérisée par son centre, son rapport et son angle. C'est d'ailleurs souvent sous cette forme, pratique pour visualiser ou réaliser les figures, que l'on utilise les similitudes.



De manière plus simple, pour "voir" la transformation utilisée pour démontrer la similitude, voilà une décomposition réalisée ici à l'aide des transformations usuelles apprises au collège et au lycée, et qui fait apparaître la transformation qui permet de passer d'un triangle à l'autre. Ici l'apport des logiciels de géométrie dynamique pourrait s'avérer précieux : le mouvement y est présent, comme dans la démonstration intuitive d'Euclide.



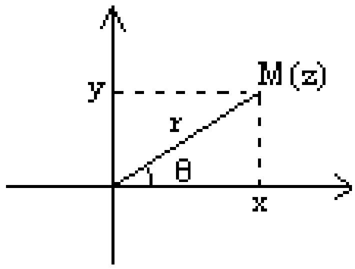
d) Le point de vue complexe

Un dernier point de vue sur les similitudes est le point de vue complexe. C'est un cadre qui permet de simplifier certains problèmes géométriques, dans le cas des similitudes, en l'occurrence, il permet de trouver une décomposition de la transformation à l'aide de ses éléments caractéristiques.

Un point M du plan complexe, est caractérisé par son affixe $z = x + iy$ où x et y sont des réels, appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z, et où i est une racine de l'équation $z^2 = -1$.

Une autre écriture possible pour z est $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, où r et θ se déduisent facilement de x et y, et sont appelés respectivement module et argument de z, encore notés $|z|$ et $\arg(z)$.

On peut déjà voir que le module et l'argument d'un nombre complexe ont une signification géométrique simple.



Une similitude du plan est une application qui à un point M d'affixe z associe un point M' d'affixe z' = f(z). L'écriture complexe d'une telle transformation est de la forme $z \rightarrow az + b$, où a et b sont des nombres complexes.

On peut étudier quelques cas particuliers :

- si $|a| = 1$, la similitude est une isométrie
- si a = 1, la similitude est une translation dont le vecteur a pour affixe b
- si $|a| = 1$ et $b = 0$, la similitude est une rotation d'angle arg(a)

Dans le cas général, pour trouver le centre de la similitude, il suffit de chercher les points invariants en résolvant l'équation $z = f(z)$, l'angle et le rapport de la similitude s'obtiennent respectivement en calculant le module et l'argument de a.

Ainsi deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables s'il existe une similitude qui permet de passer des affixes des points de l'un à celles des points de l'autre.

Ce dernier point de vue marque un retour au numérique : bien que les similitudes y soient présentes en tant que transformations, on ne "voit" pas les triangles semblables comme sous l'approche de la géométrie affine.

Ces trois points de vue sont donc relativement différents – en particulier en fonction du fait qu'ils portent sur des caractéristiques numériques, géométriques, voire même les deux à la fois. Ils conditionnent certainement plusieurs approches de la notion de triangles semblables en classe, dont certaines ne sont peut-être pas envisageables au niveau scolaire qui nous intéresse, c'est-à-dire en classe de 2nde.

e) La géométrie enseignée au collège

La géométrie, on l'a vu, est un objet mathématique qui a une histoire, c'est aussi un objet culturel et social – qui a permis de produire de la connaissance sur l'espace – mais c'est surtout pour nous un objet qui a depuis longtemps sa place dans l'enseignement. On peut distinguer plusieurs approches cohérentes de la géométrie élémentaire, vue comme une théorisation de l'espace , organisé autour de trois composantes : l'espace support, le modèle théorique et les artefacts. On distingue alors trois géométries (Houdement & Kuzniak, 2000) :

- une géométrie naturelle (Géométrie I), intuitive, liée au monde qui nous entoure et avec lequel la prise de contacte est immédiate
- une géométrie axiomatique naturelle (Géométrie II) liée à l'expérience ; qui renseigne, qui influe sur l'intuition et dépend du sujet, c'est une sorte de schéma de la réalité (et ne peut donc servir de modèle aux géométries non naturelles)
- une géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III), qui est interne aux mathématiques, logique et abstraite, et qui comporte elle aussi trois niveaux : on voit sur le dessin, on utilise des outils et des théorèmes, on passe dans l'espace euclidien.

C'est cette avant-dernière qui correspond à la géométrie pratiquée au collège. Des questions difficiles se posent par rapport à cet enseignement, en particulier sur la manière de gérer l'opposition du "vu" au "su", et sur la place de la figure et de l'intuition par rapport à la déduction et à la preuve. Nous avons vu que ces questions concernent de très près notre chapitre sur les triangles semblables.

Comment choisir d'introduire les triangles semblables ? Par les critères de similitude ou par l''exhibition de la transformation ? Cela dépend de l'utilisation que l'on va en faire et de la façon dont ils s'inscrivent dans l'ensemble du programme de géométrie.

La démonstration d'Euclide pour les cas d'égalité n'est pas rigoureuse, ce n'est qu'une explication, quant à ses définitions, ce sont plutôt des "descriptions d'intuition "[38] Les cas d'égalité

[38] *François RUSSO, Article "Géométrie" de l'Universalis*

illustrent le passage d'une perception pragmatique à un développement théorique ; c'est certainement pourquoi on retrouve les bases de cette géométrie dans l'enseignement, en ce qu'elles correspondent peut-être à l'évolution des acquisitions des connaissances géométriques chez les enfants.

Les transformations occupent une place importante dans l'enseignement des mathématiques au collège. Les élèves apprennent successivement les symétries (axiale et centrale), la translation, la rotation, c'est à dire uniquement des isométries. Ils ne disposent donc pas de l'homothétie, lors du chapitre sur les triangles semblables en classe de 2$^{\text{nde}}$. Comment alors aborder cette notion dans la continuité des programmes de collège, par le biais des transformations comme c'est souvent le cas cependant pour les triangles isométriques ?

- Finalement, comment s'inscrit la notion de triangles semblables dans le paysage mathématique, et à quoi peut-elle servir ?

Comme nous l'avons entre-aperçu à l'aide de cette analyse, elle peut constituer un outil pour faire le lien entre géométrique et numérique – en établissant des propriétés numériques caractérisant certaines figures géométriques. Un type de problèmes qu'elle peut permettre de résoudre serait donc l'établissement de rapports entre les différentes grandeurs caractéristiques des figures de base (par exemple la puissance d'un point par rapport à un cercle)

Le changement de cadre (géométrique / numérique) interne à la notion peut aussi être un obstacle pour les élèves. Y a-t-il une approche qui permet de minimiser cette difficulté ?

D'autre part, cette notion est très liée à celle de transformation – à travers l'évolution de l'axiomatique d'Euclide jusqu'à nos jours – et peut donner un statut au mouvement en géométrie, qui est porteur d'intuition mais pas de rigueur mathématique. Certaines approches sont plus "perceptives", comme on a pu le voir avec le problème du repérage des sommets homologues dans certaines configurations. Pour les élèves, on peut se demander si ce repérage a un sens mathématique quelle que soit l'approche des triangles semblables, et s'ils peuvent disposer d'outils permettant ce type de tâche, relativement complexe dans certains cas.

- Et quelles sont les conséquences de ces différents choix en termes d'apprentissage ?

Un travail de la notion de triangles semblables pourrait peut-être alors permettre de faire le lien pour les élèves entre la géométrie du collège – où transformations et géométrie des figures planes se côtoient – pour donner à l'ensemble une plus grande cohérence, et commencer à envisager le point de vue ensembliste qui y est sous-jacent. Certaines approchent peuvent-elles permettre de combler le manque de transition entre l'espace sensible, l'espace de la mesure, et l'espace géométrique supposé théorique introduit en collège dans l'initiation à la démonstration ?

Ce travail permet peut-être aussi la consolidation des acquis de géométrie du collège, en ce qu'il pousse probablement à une révision de connaissances anciennes pour les élèves.

- Les triangles semblables sont-ils un outil privilégié ? Pour quoi faire ?

Une étude plus poussée des exercices de manuels, et des exercices proposés dans les classes filmées, nous permettra peut-être de déterminer à quoi les triangles semblables sont employés, et si un autre outil, dans certains cas, ne pourrait pas s'avérer plus pertinent.

2) Analyse des programmes scolaires

Nous avons vu qu'il y avait plusieurs façons d'aborder la notion de triangles semblables, en mathématiques. Nous allons maintenant regarder ce que préconise le programme scolaire de 2^{nde} à ce sujet.

a) L'évolution des programmes jusqu'en 2000

Daubelcour (2004) réalise une analyse très poussée des programmes de mathématiques au lycée au siècle dernier, analyse de laquelle nous allons tirer les informations qui nous intéressent au sujet de l'enseignement de la géométrie et des triangles semblables en particulier.

- 1902

Dans le programme de mathématiques de 1902, l'enseignement des sciences est rehaussé au niveau de celui des lettres qui prédominait jusqu'alors. En mathématiques, l'objectif visé est de conjuguer la méthode expérimentale et la méthode déductive. La réforme de 1902 marque en géométrie au lycée une rupture avec les enseignements du siècle précédent, qui reposaient sur "les éléments de géométrie de A.M. Legendre", publiés en 1794. Cette rupture est liée à deux nouveautés des programmes qui proposent pour la première fois une fusion entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, et remettent à l'honneur la notion de mouvement, présente dans les démonstrations d'Euclide, et pourtant décriée.

Le mouvement est en effet devenu un objet mathématique, dans les travaux de Chasles sur les déplacements des solides d'une part, et en géométrie cinématique qui utilise le mouvement dans les démonstrations. L'enseignement de la géométrie devient ainsi plus intuitif, mais certains lui reprochent un manque de rigueur.

Autre fait majeur : l'étude des transformations entre dans le programme du lycée, inspiré par les travaux des géomètres du XIXème siècle.

Les trois cas d'égalité des triangles sont étudiés dès la $6^{ème}$, et encore au lycée, à l'aide des démonstrations d'Euclide, et sont reconnus comme un outil efficace pour résoudre des problèmes en géométrie portant sur les figures planes (calculs et égalités de mesures).

Le théorème de Thalès précède la définition des triangles semblables dès la classe de $3^{ème}$. Les élèves apprennent alors quatre cas de similitude des triangles – le quatrième étant : "*deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires sont semblables"*. La notion de similitude est aussi au programme, elle découle de la notion de figures semblables vue au collège. Elle est définie par son action sur le triangle.

Cette réforme n'a pas convaincu les professeurs de lycée ; en particulier, la fusion des géométries plane et de l'espace n'a pas plu. Cet échec est peut-être dû aussi à la difficulté de concilier la démarche expérimentale et la formalisation introduite dans la seconde moitié du XIXème siècle. Cela engendrera quelques changement en 1925 et 1932, qui appliquent le refus du mouvement dans les démonstrations en géométrie, marquant un retour au point de vue de Legendre.

- 1945

En 1945, une nouvelle réforme a lieu, retardée par la fin de la guerre. Les textes des programmes changent peu, mais le vocabulaire employé est plus précis. La géométrie occupe encore une place importante dans le programme de mathématiques.

Les *figures égales* et *semblables* sont toujours au programme, de même que l'étude de la similitude plane en tant que transformation entre deux figures semblables. On note une évolution de la notion de transformation du plan et de l'espace : les *déplacements* sont définis indépendamment de toute notion de mouvement, même si la définition de deux figures égales est toujours obtenue par superposition. Les cas d'isométrie sont enseignés en terminale, mais à l'inverse des programmes précédents, les triangles semblables sont introduits à l'aide des transformations, puis caractérisés à l'aide des cas de similitude.

Cette réforme concilie l'intuition des figures et la démarche déductive, tout en évacuant le mouvement. Elle reste donc tout de même dans l'esprit des programmes précédents.

- 1960

Dans les années 60, une nouvelle réforme visant à démocratiser l'enseignement[39] a lieu ; l'enseignement des mathématiques est favorisé, les horaires au lycée sont conséquents (5 heures par semaine en classe de 2[nde]), mais la part de géométrie est réduite pour la première fois depuis le siècle précédent. L'étude des groupes de transformations est au programme du lycée pour la première fois, et les notations ensemblistes et les structures font leur apparition dans les enseignements, modifiant pour longtemps l'approche de la géométrie au lycée.

L'approche des figures égales est plus rigoureuse, comme on peut le voir dans cet extrait d'un manuel de l'époque[40] :

> La Géométrie, telle qu'elle est exposée traditionnellement dans l'enseignement français, est une construction abstraite de l'esprit, édifiée à partir de certains faits qui nous sont révélés par nos sens, principalement la vue. Cette construction repose essentiellement sur la notion expérimentale que nous avons de certaines figures élémentaires. Nous allons reprendre l'étude de ces fondements afin de présenter au lecteur, sous forme synthétique, une sorte d'aperçu historique de ce que, au cours de ses études antérieures, et dans ce volume même, on lui a demandé d'admettre comme ne pouvant faire l'objet d'une démonstration. Ainsi sera fait le point des notions premières à partir desquelles a été construite la Géométrie qu'on lui a enseignée.
>
> Nous devons ajouter, toutefois, que des penseurs, épris de logique pure, renoncent à faire appel aux données de notre expérience sensorielle, et contestent, de ce point de vue, la solidité logique de notre édifice géométrique. Ils se sont demandé s'il est possible de construire la Géométrie de manière purement abstraite, sans faire appel à l'observation, une Géométrie accessible à un pur esprit dénué de notre expérience d'êtres humains. Leurs recherches ont été couronnées de succès, et ont jeté une vive lumière sur la structure même de la Géométrie, mais nous n'évoquerons pas ici leurs travaux, dont l'ensemble constitue la « Géométrie axiomatique. »

L'axiomatique euclidienne est donc toujours d'actualité. L'égalité des figures est encore définie par coïncidence, mais une différence est faite entre l'objet et sa représentation mathématique idéale :

---

[39] Ibidem

[40] Dans le manuel de COMMEAU J. (1963)

148. Égalité des figures invariables. — Lorsque, dans la salle de classe $\mathfrak{S}$ nous observons un élève manipulant une règle métallique, qui est un solide R, nous acquérons la notion que cette règle peut occuper diverses *positions* par rapport au solide $\mathfrak{S}$. Considérons, abstraitement, l'une de ces positions comme l'ensemble des points liés à $\mathfrak{S}$, avec lesquels coïncident les divers points de R ; autrement dit, considérons R comme l'*image* d'une figure F formée de points liés à $\mathfrak{S}$. Le fait expérimental que R est un corps solide se traduit en langage géométrique en disant que les figures invariables F_1 et F_2 associées à deux positions R_1 et R_2 de R sont deux *figures égales*. Considérons encore deux objets solides, moulés, issus du même moule ; considérons-les comme images de deux figures géométriques ; de même que nous disons que les deux objets sont égaux, nous dirons que les deux figures géométriques associées sont égales. De plus, si la *coïncidence* point par point des deux objets est irréalisable matériellement, nous concevons qu'elle soit possible pour les figures géométriques idéales et immatérielles dont ces objets sont les images. En résumé, ***nous dirons que deux figures géométriques invariables sont égales si elles ont pour images deux positions d'un même corps solide, ou deux corps solides égaux.***

Nous sommes ainsi conduits à dire que la figure F_1 est égale à la figure F_2 si on peut amener F_1 en coïncidence point par point avec F_2 ;

Enfin, pour la première fois depuis le début du siècle, les isométries sont définies comme transformations laissant la distance invariante :

157. Position du problème et définitions. — Dans deux figures égales, les segments homologues ont même longueur. Inversement, considérons deux figures F et F′ qui se correspondent point par point de manière que la distance de deux points quelconques de F soit égale à la distance des deux points homologues de F′ ; que peut-on dire de ces deux figures ? Notons que de telles figures existent : d'abord, bien entendu, deux figures égales, mais aussi deux figures symétriques par rapport à un point, une droite, ou un plan ; nous dirons que deux telles figures sont *isométriques*.

DÉFINITION. — **On dit que deux figures sont isométriques lorsqu'elles se correspondent point par point de manière que la distance de deux points quelconques de l'une soit égale à la distance des points correspondants de l'autre.**

Pour Daubelcour, il s'agit là d'un véritable achèvement pour la géométrie du programme de 1963, qui est fondé sur les bases de la géométrie euclidienne, déjà étudiée au collège, mais prend aussi en compte les avancées des mathématiciens du XIXème siècle.

En 1970 a lieu la réforme des *maths modernes,* pour "suivre les gros progrès qui ont eu lieu en recherche mathématique depuis le début du siècle, et réduire le faussé entre le lycée et l'université"[41]. La réforme est fortement influencée par le *Bourbakisme*, qui consiste en une mise en ordre des mathématiques à l'aide d'une structure algébrique. On parle aussi de *structuralisme*, pour exprimer cette nouvelle primauté de la structure sur l'objet.

[41] Cf. DAUBELCOURT J.P. (2004)

Cette réforme marque une rupture assez violente, et provoque beaucoup de débats.

Dans le cadre d'une publication de l'APMEP[42], on peut lire :

4. Difficultés de la géométrie

L'enseignement de la géométrie présente un grand nombre de difficultés en plus de celles qui se rencontrent dans tout l'enseignement des mathématiques. Il y a intérêt à en rechercher les raisons par delà les polémiques souvent passionnées sur le sujet.

Il faut apprécier à leur juste valeur les arguments en faveur d'un enseignement de la géométrie, c'est-à-dire tenir compte des critiques raisonnables que cet enseignement s'est attiré. Mais puisque la conclusion est qu'il faut enseigner la géométrie, le vrai problème est d'améliorer sa présentation ; il sera alors presque évident que l'étude des espaces vectoriels rend à la géométrie sa place dans un enseignement adapté aux conditions actuelles de la science et du monde.

Mais élever ainsi le ton du débat ne contribue pas nécessairement à le rendre clair. Essayons donc d'analyser plus calmement le pour et le contre...

La géométrie classique (donc euclidienne) est une bonne description de l'espace dans lequel nous vivons, celui qui est utilisé dans la plus grande partie de la physique élémentaire et de la mécanique. La culture d'un individu serait bien incomplète s'il ignorait tout de cette structure. Il est vrai, par contre, que la physique et la mécanique nous ont contraints à considérer d'autres espaces et que les sciences humaines dans leur développement actuel font grande consommation de structures assez différentes de celle de notre « bon » espace euclidien. Mais comment aborder toutes ces géométries sans apprendre d'abord les propriétés de la plus familière, celle des jeux enfantins?

Un autre argument en faveur de cet enseignement est la grande richesse des structures diverses contenues dans la grande structure générale de l'espace euclidien. Tout le monde sait quelle mine de problèmes variés constitue la géométrie élémentaire. Il n'est pas étonnant que la pédagogie ait exploité ce filon

Pour les partisans de cette réforme, la géométrie n'est en fait plus qu'un chapitre de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Pour beaucoup d'autres, une géométrie rigoureuse basée sur la méthode euclidienne et les figures est encore possible, comme pour Alfred Doneddu[43], qui propose dans son cours de 1967 un enseignement axiomatique de la géométrie, comprenant un système de dix axiomes et des définitions :

[42] Dans *les Chantiers mathématiques*

[43] Cf. DONEDDU. A (1967)

1, 1, 2. Définition de la Géométrie.

En Géométrie, il y a deux éléments essentiels : l'*espace* E et le *groupe* $\mathfrak{J}$ des transformations.

1° L'espace E est l'ensemble de base de la théorie : ses éléments sont nommés *points*.

Tout point est noté par une minuscule latine : $a \in E$.

Dans l'espace sont données des figures ou parties de E nommées *droites* et *plans*.

Une droite (ou un plan) est notée par une majuscule : droite D, plan P.

$$P \subset E\,; \qquad P \neq \varnothing\,; \qquad P \neq E\,.$$

2° Le groupe $\mathfrak{J}$ des **isométries** est un sous-groupe du groupe des transformations (ou permutations) de E. On dit que $\mathfrak{J}$ *opère* sur E. Ce groupe introduit dans l'espace E la notion d'*égalité des figures*.

Espace et groupe sont caractérisés par des axiomes que nous donnons plus loin. On peut donc donner la définition suivante :

Définition : ***La Géométrie euclidienne*** *est l'étude d'un espace ponctuel sur lequel opère un groupe de transformations nommées* ***isométries***.

Les mathématiciens qui participent à cette réforme sont partagés sur le choix de l'axiomatique à mettre an place. Dieudonné (1978) préconise de s'appuyer sur l'algèbre linéaire pour construire la géométrie affine. C'est ce point de vue qui est retenu pour le lycée, tandis qu'au collège, une géométrie axiomatique est encore privilégiée. Les objets isométriques sont définis à l'aide des transformations isométriques. Les espaces vectoriels sont étudiés dès la 2$^{\text{nde}}$; les similitudes constituent alors une application intéressante des nombres complexes. Les cas d'égalité et la notion de triangles semblables disparaissent momentanément des programmes.

Pour Daubelcour, un inconvénient majeur de cette réforme, outre la rigueur rébarbative du formalisme adopté, est la disparition des figures géométriques, et, avec elles, d'un outil intuitif non négligeable pour les élèves. Par exemple, pour l'étude des similitudes avec les nombres complexes, une représentation géométrique des objets manipulés est bien utile, mais elle est rendue de moins en moins possible par le manque d'expérience des élèves à recourir à la réalité du monde qui les entoure. De plus, la rupture entre collège et lycée prive l'élève de la plupart de ses représentations mentales des objets mathématiques. Il y a finalement peu de situations où l'élève rencontre naturellement et utilement les structures enseignées ; elles sont donc étudiées pour elle-mêmes, et non pour résoudre des questions posées en dehors du contexte. Les capacités des élèves à démontrer s'en trouvent affectées.

Tout ceci concourt à une perte de sens de l'enseignement des mathématiques au lycée.

La contre réforme des années 80 prévoit quelques arrangements dans les programmes du collège, puis du lycée. Les programmes sont allégés régulièrement. L'algèbre linéaire disparaît en 1986, et l'étude des figures revient dans l'enseignement. Ce nouveau programme favorise l'activité de l'élève, plutôt qu'un cours magistral de l'enseignant, et à cette fin, la géométrie ne repose plus sur des axiomes clairement posés, mais sur des outils qui permettent à l'élève de résoudre des problèmes concrets.

Les cas d'égalité et de similitude font leur retour à la rentrée 2000 dans le programme de la classe de 2nde.

b) Analyse de la littérature professionnelle au moment de la réintroduction des cas d'égalité

Le rapport d'étape de janvier 2000 de la commission Kahane[44], qui a mené une réflexion globale et à long terme sur l'enseignement des mathématiques de l'école élémentaire à l'université, tient compte des projets de programme pour la rentrée 2000. La réhabilitation des cas d'égalité y est saluée :

> *"les cas d'égalité (...) donnent un critère commode permettant d'affirmer l'existence d'une transformation échangeant deux triangles sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci. En outre, si on pense la géométrie en termes d'invariants il est clair que les cas d'égalité (qui affirment en gros que l'on a bien énuméré tous les invariants) constituent un outil mathématique essentiel. De plus, il suffit de prendre quelques exemples concrets pour se convaincre de leur efficacité et l'on peut dire sans exagération qu'en les supprimant on a privé plusieurs générations d'élèves de l'outil le plus simple pour faire de la géométrie. Enfin, sur le plan de la cohérence de l'enseignement les cas d'égalité fournissaient un fondement de la géométrie (le système d'axiomes d'Euclide-Hilbert implicitement sous-jacent), imparfait certes, mais sur lequel les autres résultats reposaient à peu près solidement."*

[44] rapport consultable sur http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/

Mais cette réintroduction est jugée "trop tardive" :

Cela semble une piste intéressante, encore que le moment choisi nous paraisse trop tardif. Sur ce plan, une réflexion supplémentaire est obligatoire, qui prenne en compte à la fois l'aspect mathématique et épistémologique (le nécessaire équilibre entre transformations et cas d'égalité) mais aussi la formation des professeurs.

Nous avons fait quelques recherches sur le site PUBLIMATH avec les mots clefs "triangles semblables", "Euclide" et "cas d'égalité". Nous avons trouvé de nombreux articles dans lesquels il était question de l'enseignement des triangles semblables et isométriques. Nous avons relevé quelques-uns d'entre eux, qui nous paraissaient pertinents pour notre recherche. Tous les articles qui suivent s'interrogent sur le rôle et la place des cas d'égalités et de similitude dans l'enseignement et prennent position sur le choix de l'introduction de la notion en 2nde

Rudolf Bkouche (2000), par exemple, se demande dans un bulletin de l'APMEP s'il faut se réjouir de la réintroduction des cas d'égalité. Il analyse les conditions de cette réintroduction et se demande si elle a lieu "*pour permettre quelques activités supplémentaires ou pour retrouver le sens oublié de la géométrie"*. Il salue tout de même ce retour en ce qu'il peut *"donner aux élèves les moyens intellectuels d'appréhender ce domaine de la connaissance qu'est la géométrie"*. Pour lui, il faut *"prendre en compte le mouvement dans l'enseignement de la géométrie élémentaire et montrer comment les cas d'égalité des triangles permettent d'éliminer le mouvement de la géométrie"*

Dans un autre bulletin de l'APMEP, Jean-Pierre Richeton (2001) écrit que la réintroduction des cas d'égalité des triangles et des triangles de même forme permet d'enrichir la *"boîte à outils"* de ses élèves Il déplore seulement que les manuels n'en aient pas profité pour donner moins d'exercices fermés

Anne Walter (2000), enfin, annonce dans son article de la revue petit x, vouloir essayer de comprendre les choix didactiques faits dans l'enseignement actuel de la géométrie au collège et relancer le débat sur les principales difficultés relatives à cet enseignement. Il faudrait d'après elle *"faire le lien au collège entre la notion de transformation (qui occupe une part importante des programmes) et les éléments de la géométrie euclidienne, géométrie dans laquelle les transformations n'ont pas de place explicite, afin que leur enseignement ne se réduise pas à une* *simple juxtaposition des connaissances".* Le fait que les élèves n'apprennent au collège que les isométries, des transformations qui déplacent les objets sans les transformer pose problème : cela ne souligne pas la particularité des isométries. Walter mettrait les cas d'égalité au *"programme de 5ème, qui les introduit subrepticement sans les appeler ainsi".* Pour elle, *"du point de vue de la transposition didactique, il n'est pas cohérent d'utiliser les cas de similitude en tant que théorèmes car, ce faisant, on réintroduirait un outil archaïque alors que les transformations constituent un objet moderne et performant".*

On voit que pour ces auteurs, la réintroduction des cas d'égalité et de similitude ne paraît pas être une évidence, et soulève de nombreuses questions et problèmes. On peut alors penser que pour les professeurs qui auront la charge d'enseigner ces notions, il y aura aussi des difficultés à surmonter.

c) Lecture du programme 2000 et commentaires

Voici l'extrait du programme officiel de mathématiques pour la classe de 2nde à la rentrée 2000 au sujet des triangles isométriques et des triangles semblables..

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie [géométrie] du programme :

- développer la vision dans l'espace
- proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège.

Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés :

- les triangles isométriques
- les triangles de même forme
- et des problèmes d'aires

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Triangles isométriques Triangles de même forme	Reconnaître des triangles isométriques Reconnaître des triangles de même forme	Les problèmes seront choisis de façon : - à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité - à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive - à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : “deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre” (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque,…).

Nous avons aussi pris en compte pour notre analyse les accompagnements officiels des programmes[45], qui figurent en annexe. De la lecture des programmes et des accompagnements, il ressort trois grandes lignes.

Tout d'abord, on remarque que les textes d'accompagnement suggèrent de s'appuyer sur des notions fortement liées à la *perception.* En effet, ils engagent à *reconnaître* des triangles de même forme, à *manipuler* ou *construire* des objets, à *observer* ou *rechercher des régularités* entre ces objets.

Les textes engagent aussi les enseignants à s'appuyer sur les *acquis de collège*, c'est ce qui justifie que le nombre limité de notions nouvelles à introduire. En particulier, il n'y a rien de nouveau sur les transformations, et il n'est pas question d'introduire ici les homothéties, qui permettraient pourtant une approche des triangles semblables par les transformations. Cela nous orienterait donc plutôt vers une approche à l'aide des cas d'égalité d'Euclide.

Enfin, le programme de géométrie insiste sur la nécessité de mettre en œuvre un *raisonnement déductif*, et de connaître le *vocabulaire logique adapté*. Les textes signalent

[45] Voir ANNEXES : accompagnements du programme de géométrie pour la classe de 2^{nde} (rentrée 2000)

l'importance de différencier le résultat observé du résultat démontré et d'annoncer clairement le *statut des énoncés.* Cette exigence se retrouve bien dans les deux approches envisagées.

Ces premières recommandations du programme ne nous renseignent donc pas forcément sur la manière d'aborder les triangles semblables. En effet, *la méthode axiomatique* [de la géométrie euclidienne]*, ayant longtemps été considérée comme la meilleure introduction au raisonnement déductif (*Coxeter & Greitzer, 1971), paraît être indiquée pour apprendre aux élèves le vocabulaire logique ainsi que le statut des énoncés et des théorèmes. Mais cette approche ne fait pas vraiment appel à la perception ou aux connaissances antérieures des élèves.

D'autre part, en se plaçant dans la continuité du collège et de l'étude des transformations, et dans le souci de s'appuyer sur la perception, une introduction de l'homothétie et des triangles semblables pourrait être la bienvenue, mais ce n'est pas ce qui est proposé par les programmes. En revanche, il est possible d'introduire les triangles isométriques à l'aide des isométries vues au collège.

Regardons alors précisément comment les textes suggèrent d'aborder les notions de triangles semblables et de triangles isométriques.

Le programme propose de construire un triangle en connaissant certains de ses côtés et/ou de ses angles, pour constater quelles données le caractérisent. Les textes d'accompagnement précisent qu'il s'agit là de déterminer le nombre minimal d'informations nécessaires pour caractériser un triangle. On peut remarquer que cette approche de la notion nouvelle repose bien sur la perception, en ce qu'elle convainc les élèves que des triangles ayant certaines propriétés sont forcément identiques, donc isométriques. La notion nouvelle de triangles semblables semble alors constituer une réponse au problème de caractérisation de figures.

La définition de "triangles isométriques" reste au choix du professeur, qui peut préférer "celle qui s'inscrit le plus naturellement dans le fil des programmes du collège, où l'on a construit des images de figures géométriques par symétrie axiale ou centrale, par translation ou par rotation, et [qui] pourrait s'"énoncer ainsi : deux triangles sont isométriques si l'un d'eux est l'image de l'autre par une translation, une symétrie axiale, une rotation ou une succession de telles transformations". Le professeur peut aussi choisir une autre définition, "plus intuitive, [qui] pourrait être : deux triangles sont isométriques s'ils ont des côtés et des angles respectivement égaux."

Les textes d'accompagnement proposent donc les deux approches possibles : la définition d'Euclide ou bien les transformations. Le choix fait par l'enseignant pour aborder les triangles isométriques peut-il alors influencer son approche des triangles semblables ?

Ensuite, pour les triangles semblables, la définition qui est donnée par le programme est la suivante : “deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre”. Il s'agit là d'un choix fait par les programmes, car on peut noter que ce n'est pas la définition donnée par Euclide, qui définit les triangles semblables comme des triangles ayant à la fois trois angles de même mesure et trois côtés proportionnels. La définition donnée par le programme est déjà une condition de similitude, suffisante mais pas minimale, puisqu'il suffit en réalité de deux angles respectivement égaux pour obtenir la similitude des triangles. C'est ensuite à l'aide du théorème de Thalès que la condition de similitude par la proportionnalité des côtés est introduite, réutilisant ainsi un théorème appris au collège. Il n'est donné aucune précision pour la comparaison des aires des figures semblables.

On peut se demander pourquoi il a été fait le choix de cette définition plutôt qu'une autre dans les accompagnements. C'est une propriété assez visuelle, qui permet même éventuellement de mesurer les angles pour prouver la similitude, mais elle ne s'appuie pas sur les connaissances antérieures des élèves. Peut-être encore est-ce plutôt une définition qui correspond à la propriété, sous-jacente ici, de la similitude, transformation qui conserve les angles. En effet, la disposition que l'on trouve chez les professeurs observés, qui insistent tous sur l'importance d'écrire les points homologues les uns en dessous des autres, est fortement liée à la notion de transformation, qui relie chacun des points à son image. Mais les élèves ne disposent pas des connaissances nécessaires pour rapprocher les triangles semblables des transformations. Y aura-t-il alors ici un problème pour les élèves ?

Si on considère l'approche suggérée au préalable pour les triangles isométriques, il peut aussi s'agir d'une démarche qui consisterait à soustraire des informations sur les triangles, pour passer des triangles isométriques aux triangles semblables. Cela reviendrait considérer la notion de triangles semblables comme une *extension de la notion de triangles isométriques.*

On peut aussi se référer aux textes d'accompagnement qui parlent du "*problème des figures de même forme"* et qui insiste sur la dimension "*résolution de problèmes*", pour envisager cette notion nouvelle comme étant une *réponse à un problème*.

Dans tous les cas, il paraît difficile de relier la notion nouvelle de triangles semblables à l'ensemble des connaissances précédentes, de manière à la fois "perceptive" et cohérente.

d) Les difficultés liées à la géométrie : la continuité collège - lycée

Au collège, les programmes reposent sur un système d'axiomes proche de celui d'Euclide et d'Hilbert, mais de manière implicite. Les cas d'égalité des triangles n'en font pas partie, même s'ils interviennent en $5^{ème}$ dans le chapitre "construction de triangles", et l'outil performant qu'ils constituent est remplacé par l'usage des symétries axiales, puis des autres isométries. Il faut donc, au collège, exhiber la transformation pour pouvoir affirmer que deux triangles sont égaux.

Nous avons vu qu'il n'était pas facile de placer les triangles semblables dans le programme de 2^{nde}, où ils sont annoncés comme un prétexte à la révision des connaissances de géométrie du collège. En fait on peut pointer ici plusieurs éléments qui peuvent être problématiques pour les élèves.

Première difficulté pour les élèves de 2^{nde} en géométrie : la dimension *outil / objet* (Douady, 1986) des connaissances géométriques nouvelles. Les propriétés qu'ils ont apprises au collège étaient souvent d'abord étudiées pour elles-mêmes, en tant qu'objet mathématique, dans les exercices qui s'y rapportaient. Pour les élèves, il s'agissait donc d'utiliser les connaissances du cours, à un niveau *technique* ou *mobilisable,* c'est-à-dire sans qu'ils aient besoin d'aller chercher eux-mêmes ou très loin dans le temps les notions à utiliser. Ensuite, ces propriétés permettent de résoudre d'autres problèmes : elles ne constituent pas la finalité des exercices proposés. Les connaissances nécessaires aux élèves doivent donc déjà avoir subi une réorganisation qui permet à ceux-ci de les utiliser même si elles ne sont pas explicitement sollicitées. Elles doivent donc être *disponibles* pour les élèves.

Les triangles semblables sont à la fois un objet nouveau et un contexte où utiliser des propriétés anciennes pour s'exercer à la démonstration. Mais comme les autres notions géométriques plus anciennes que nous venons d'évoquer, ils constituent aussi un *outil* pour résoudre des problèmes. Il sera intéressant pour nous de regarder comment ces deux dimensions de la notion sont représentées dans les exercices, et quels types de problèmes l'outil "triangles semblables" permet de résoudre. Il paraît probable que ce changement de statut de la notion, qui a lieu dans le temps du chapitre, nécessite une réorganisation rapide pour l'élève, et peut être à l'origine de certaines de ses difficultés. Nous regarderons plus précisément quand et comment s'effectue ce passage.

D'autre part, le statut de la "figure" dans le cours de géométrie évolue, sans que cette évolution ne soit prise en charge par le professeur – ou encore signalée dans les instructions officielles. En effet, au collège, les exercices de géométrie qui sont proposés aux élèves demandent de construire des figures – en évitant si possible les cas trop particuliers – ou de travailler sur une figure qui, si elle est donnée, est une figure "juste", c'est-à-dire une figure qui correspond aux propriétés données dans l'énoncé (s'il faut par exemple démontrer dans un exercice le parallélisme de deux droites, et que la figure sur laquelle porte la question est donnée, les deux droites en questions y sont généralement représentées parallèles). L'élève travaille alors sur une figure où les propriétés cherchées sont perceptibles. Les cas de figures sont rarement envisagés.

Mais au fur et à mesure des apprentissages en géométrie, la figure acquiert un double rôle (Perrin, 2005) dans les exercices : il faut qu'elle soit suffisamment juste pour inciter l'élève à former les bonnes conjectures ou à mobiliser les propriétés attendues, mais il ne faut pas qu'elle soit trop juste, afin de laisser planer un doute et d'engager l'élève à démontrer la propriété visée, dont il ne peut se convaincre simplement à l'aide de la figure.

Nous avons vu que dans ce chapitre justement, la figure pouvait être un élément de perturbation, en particulier à cause des sommets homologues qu'il faut voir sur la figure puis associer deux par deux. Il n'est pour autant pas donné aux élèves de méthode appropriée, et pour cause : sans les transformations, une justification rigoureuse de ce repérage est difficile. Nous n'avons pas non plus repéré de justification – méthodologique ou autre – pour ce type de tâche dans le discours des professeurs. Les élèves sont donc entièrement livrés à eux-mêmes en ce qui concerne cette étape non triviale et presque systématique des exercices qui leur sont donnés, sauf si, et nous verrons que c'est souvent le cas, le professeur choisi de la prendre à sa charge.

Enfin, nous pouvons chercher d'autres difficultés possibles des élèves en considérant les différents *niveaux de conceptualisation* qui spécifient les domaines de travail des élèves en géométrie. Robert (2003) en définit cinq, caractérisés par le découpage des savoirs qu'ils mettent en jeu, c'est-à-dire un ensemble de définitions et théorèmes qui les fondent, des modes de raisonnement et un niveau de rigueur, et des problèmes[46]. Elle considère que "la pluralité des grands domaines de travail en géométrie, ainsi que la nature des types de problèmes à résoudre et les démarches correspondantes, sont une cause intrinsèque, presque épistémologique, de difficultés."

[46] mais ces domaines ne sont pas des cadres

En particulier, selon elle, la géométrie du collège correspond, pour la plupart des enseignements, à un niveau de conceptualisation *"à la Euclide"*, fondé sur les définitions non rigoureuses d'Euclide, sur des axiomes admis implicitement, des démarches déductives qui s'appuient sur la perception et en particulier sur la figure et qui permettent une étude de configurations de base. A ces emprunts, il faut tout de même rajouter les transformations, absentes chez Euclide, mais très présentes dans la géométrie du collège, et surtout les nombres réels et la théorie des ensembles (même implicite) pour pouvoir utiliser les formules de calcul d'aire par exemple.

Il peut donc s'avérer difficile de respecter la cohérence mathématique au sein d'un niveau qui résulte de mélanges. C'est le cas ici en particulier si l'on considère la rigueur attendue en géométrie, qui n'est pas toujours transparente.

e) Programme des années suivantes : les conséquences du manque de continuité

Nous avons vu que les triangles semblables étaient une notion nouvelle pour les élèves, en classe de 2nde, et nous nous sommes demandé comment cette notion apparaissait dans les programmes de mathématiques des deux années suivantes au lycée. On aurait pu s'attendre à ce que la notion de triangles semblables soit réinvestie par la suite et constitue un outil pour résoudre d'autres types de problèmes. Pourtant, les triangles semblables ne sont pas repris dans les classes de 1ère et Terminale.

La notion d'homothétie est introduite en classe de 1ère, et utilisée pour étudier des configurations géométriques. La notion de triangles semblables n'apparaît pas alors dans le programme. Les similitudes sont introduites en classe de Terminale S, dans le chapitre sur les nombres complexes, mais il n'est pas plus fait mention des triangles semblables dans le programme.

La notion de triangles semblables semble donc être un objet lié uniquement à la classe de 2nde, et le fait qu'elle ne soit pas reprise dans les classes de 1ère et de Terminale lui donne un statut particulier, voire anecdotique. L'un des professeurs que nous avions envisagé d'observer n'a d'ailleurs pas jugé bon de traiter ce chapitre dans sa classe, puisque, d'après cet enseignant, ce chapitre ne servira pas dans les classes suivantes !

f) Obstacles liés à la notion et difficultés éventuelles engendrées pour les élèves

Cette étude de la notion de triangles semblables nous a permis de dégager quelques dimensions qui pourraient s'avérer problématiques pour les enseignants ou pour les élèves.

Nous avons vu qu'il était impossible, étant donné les programmes actuels, d'introduire les triangles semblables à l'aide des transformations. En effet, les élèves n'ont appris au collège que les isométries. Les similitudes – même les homothéties – ne sont pas introduites en classe de 2^{nde}, interdisant donc une telle approche pour les triangles semblables.

Mais l'absence des transformations malgré la présence sous-jacente des similitudes, peut être envisagée comme une source d'incompréhension pour les élèves. En effet, la notation des points homologues "l'un en dessous de l'autre" fait, en quelque sorte, référence à cette transformation, mais ne semble pas porteuse de signification pour les élèves, comme nous le verrons dans certaines de leurs erreurs au contrôle. Parmi les élèves qui se plient à cette exigence du professeur, il semble que certains "trichent" et déduisent les homologues des questions qui suivent, portant souvent sur les rapports de longueurs. La nécessité d'une telle écriture n'est peut-être qu'un contrat vide de sens pour les élèves.

- Comment réaliser le repérage des homologues sans l'aide des transformations ?

Pour les élèves il s'agit de faire un classement des grandeurs des deux triangles. Ils peuvent repérer les sommets homologues en associant les angles entre eux (le plus petit avec le plus petit, le moyen avec le moyen, et le grand avec le grand), ou encore en associant les longueurs entre elles (en les classant de même) ; les angles opposés aux côtés associés sont alors homologues. Il est peut-être plus facile de classer des longueurs que des mesures d'angles, en tout cas cette méthode peut peut-être simplifier le repérage.

Cependant le passage entre le repérage des côtés homologues et celui des sommets homologues n'est pas évident. Encore une fois, il y a derrière ces équivalences les transformations sous-jacentes et leurs propriétés :

A	B	C		AB	BC	AC
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\Rightarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
A'	B'	C'		A'B'	B'C'	A'C'

Cette correspondance vient du fait que les similitudes conservent les rapports de longueurs. Et dans l'autre sens, après avoir classé les longueurs des triangles :

$$\begin{array}{ccccc c ccc} AB & < & BC & < & AC & & A & B & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A'B' & < & B'C' & < & A'C' & & A' & B' & C' \end{array}$$

Dans l'autre sens, il n'est pas évident de déduire les sommets homologues à l'aide des côtés homologues.

L'absence des similitudes entraîne un manque de technologie (il n'y a pas de théorème pour justifier la démarche) mais aussi un manque de méthode. Le repérage est compliqué à réaliser, et on ne sait pas pourquoi il faut le faire. Ce n'est pas a priori parce que les élèves n'ont pas à leur disposition la justification d'une méthode que ça gêne leur apprentissage : nous ne savons pas quelle est l'influence de ce manque. Dans certains cas d'ailleurs, on voit des élèves réussir dès lors qu'ils savent comment faire, et cela d'autant mieux que c'est bien algorithmisé[47]. Dans le cas des triangles semblables, la particularité c'est que c'est directement une méthode (une méthode pour passer des sommets homologues aux côtés ou réciproquement) qui manque. Autrement dit, il manque une méthode et la justification.

L'absence des transformations permet tout de même un repérage des homologues, mais elle prive les élèves d'un algorithme qui pourrait peut-être leur faciliter la tâche.

Une autre contradiction nous a paru importante, c'est celle du lien systématique entre "triangles isométriques" et "triangles semblables", qui est fait dans les programmes, mais aussi dans la quasi-totalité des manuels de 2nde, et donc bien entendu chez certains des professeurs observés. Si l'on veut introduire les triangles semblables à la suite des triangles isométriques, il faut trouver comment la notion nouvelle se rattache à la précédente. Or, on l'a vu, ce lien n'est pas si simple.

Si le professeur choisit une approche des triangles isométriques par les cas d'égalité, les triangles semblables peuvent être envisagés comme une extension de la notion de triangles égaux. Dans ce cas, la notion de triangles semblables repose moins sur la perception des élèves, et ce choix brise la continuité avec ses connaissances de géométrie du collège. La proportionnalité des côtés, qui n'est pas une définition des triangles semblables proposée par les programmes, paraîtrait

[47] par exemple pour le travail sur la racine carrée en 4ème.

pourtant plus dans le fil des connaissances du collège, où elle est beaucoup travaillée, et ce dès la classe de $6^{ème}$.

Si, comme le proposent les programmes, le professeur choisit plutôt d'introduire les triangles isométriques à l'aide des isométries, que l'élève a travaillé longuement au collège (symétrie, rotation, translation), les triangles semblables ne peuvent être approchés de la même manière (les isométries ne suffisent plus). Il est vrai que ces transformations interviennent dans la démonstration de la proportionnalité des côtés des triangles semblables, mais est-ce suffisant pour assurer alors une cohérence entre les deux chapitres ? Et cette incohérence pourrait-elle être à l'origine de difficultés pour les élèves ?

Enfin, nous nous sommes penché sur le fait que cette notion n'était pas reprise dans le programme des classes de $1^{ère}$ et de Terminale. Quel statut aura-t-elle donc pour les élèves ? Quelle utilité sauront-ils lui prêter si elle n'est pas nécessaire à la résolution des problèmes qui leur seront posés par la suite ?

Nous allons donc particulièrement étudier par la suite les choix des professeurs pour introduire cette notion et l'articuler avec celle de triangles isométriques. Nous allons aussi analyser les erreurs des élèves pour savoir si le fait de ne pas disposer de l'outil transformation sous-jacent à la définition des triangles semblables, va créer un problème pour eux.

IV) Analyse détaillée des vidéos pour l'un des trois professeurs

Nous avons réalisé des analyses similaires pour les trois professeurs, plus ou moins simultanément. La première observation a eu lieu en février 2003, et les deux dernières l'année suivante[48]. Nous avons choisi ici de ne présenter en détail que les résultats obtenus pour l'un des professeurs, afin d'expliciter nos analyses et donner les résultats obtenus, sans pour autant relater la même démarche, relativement longue, à plusieurs reprises.

1) Le choix de madame B 98

2) Les données recueillies en classe 98

3) Inventaire des tâches données en classe 100

4) Analyse a priori des tâches et activités mathématiques provoquées par les exercices donnés en classe 105

5) Description du déroulement 119

a) Tableau récapitulatif des tâches en classe 119
b) Commentaires sur les tâches proposées et leur déroulement 121

6) Analyse des tâches du contrôle et première comparaison avec les tâches et activités potentielles du cours 129

a) Analyse des tâches du contrôle 129
b) Première comparaison du contrôle avec ce qui a été fait en classe 133

7) Les résultats des élèves au contrôle 134

a) La relation entre apprentissage et réussite au contrôle 134
b) Le classement en "bons" ou "mauvais" élèves 135
c) Les résultats 137

8) Une première analyse des procédures des élèves et de leurs erreurs, en fonction de la connaissance nouvelle à appliquer dans le contrôle. 139

9) Conclusion 151

a) Bilan de la comparaison des tâches données en classe et en contrôle 151
b) Interprétation des résultats : analyse exercice par exercice 152
c) Des conclusions plus générales sur le rapport activités – apprentissages 153
d) Des erreurs liées au type de notion ? 155
e) Limites de notre recherche sur madame B 161
f) Des résultats moins lisibles pour les deux autres professeurs 161

[48] Le délai entre les deux périodes s'explique en partie par le fait que nous avons passé un certain temps à chercher des terrains d'observations adéquats. Nous nous intéressions en effet à un chapitre particulier, et avons attendu le moment de l'année où le professeur avait choisi de l'aborder dans sa classe. Nous avons ainsi pu réaliser nos observations en essayant de ne pas trop déranger les classes qui nous ont généreusement ouvert leur porte.

1) Le choix de madame B

Nous avons choisi de donner nos résultats pour Mme B., qui est le premier professeur que nous avons observé. Nous avons fait ce choix pour plusieurs raisons.

Les analyses du chapitre « triangles semblables » de Mme B. sont les premières que nous avons réalisées, elles nous ont permis d'affiner par la suite nos grilles d'observation et d'analyse, et de revenir plusieurs fois sur les données collectées, qui nous sont donc devenues très familières.

Il s'est avéré ensuite que la classe de Mme B. est la seule parmi les trois classes observées qui soit d'un niveau faible – d'après les appréciations de Mme B. elle-même. Ainsi, l'effet des pratiques de Mme B. sur l'apprentissage éventuel des élèves nous a paru plus intéressant à analyser finement, que l'effet des pratiques des deux autres professeurs sur l'apprentissage de leurs élèves, qui sont a priori d'un très bon niveau.

Enfin, nous verrons dans le chapitre suivant que les choix de Mme B. en matière d'enseignement et d'évaluation sont les seuls qui nous permettent une comparaison poussée entre ce qui a été fait en classe et les résultats des élèves au contrôle final. C'est en effet la seule classe où nous avons pu approcher par exemple, grâce aux choix de formes de travail et d'énoncés donnés aux élèves, l'influence du temps de recherche sur les apprentissages, ou encore les éventuels effets différentiateurs des pratiques sur les élèves. Nous expliquerons pourquoi ces résultats n'ont pu être obtenus avec les autres observations.

2) Les données recueillies en classe

Nous disposons de vidéos réalisées dans cette classe de seconde de 33 élèves, dans un établissement de la région parisienne de niveau plutôt faible[49]. Le professeur a filmé lui-même l'intégralité – ou presque – des séances portant sur la notion de triangles semblables, ce qui représente trois séances d'une heure en classe entière, et une séance de module d'une heure, en demi-classe. Une deuxième séance de module a eu lieu, qui n'a pas été filmée, mais que nous avons prise en compte dans nos analyses. La dernière séance (bilan) n'a pas été filmée.

Le professeur nous a fourni les énoncés des exercices et des devoirs distribués aux élèves, ainsi que celui du contrôle qui sanctionnait la fin du chapitre sur les triangles semblables, ainsi que quelques informations complémentaires sur la classe. Nous disposons aussi des copies corrigées des élèves au contrôle.

[49] Toujours d'après Mme B

Quelques données nous manquaient tout de même, qui ont fait l'objet d'une correspondance par courrier électronique avec le professeur[50]. Il est cependant difficile, étant donné que nous avons choisi de ne pas tourner nous-mêmes les vidéos, de réunir toutes les informations utiles, surtout après avoir laissé passer quelques mois, le temps pour nous de réaliser les premières analyses.

Grâce à ces données, nous pouvons en particulier déterminer les choix du professeur pour introduire et faire fonctionner les triangles semblables dans cette classe. Le professeur a choisi ici d'introduire le chapitre sur les triangles semblables[51] juste après celui sur les triangles isométriques. Le premier cours commence par des activités permettant d'utiliser la définition de "triangles semblables" en l'appliquant sur des exemples simples, puis de constater l'existence d'une définition simplifiée (3 exercices). Les élèves effectuent ensuite des exercices un peu plus élaborés dans des configurations différentes (2 exercices : cercle, puis parallélogramme). Le professeur introduit ensuite la proportionnalité des côtés, puis le rapport des aires (1 exercice), pour finir sur les caractérisations des triangles semblables (2 exercices qui ne sont pas traités sur nos vidéos).

Le professeur a donné aux élèves deux devoirs à faire à la maison, pour lesquels un corrigé détaillé a été distribué. Deux séances de module ont eu lieu, comportant uniquement des exercices sur les triangles semblables ; la deuxième séance n'a pas été filmée.

A partir des vidéos et des explications du professeur, nous avons pu reconstituer en grande partie la chronologie et la répartition des séances, qui figure dans le tableau suivant :

1	Introduction de la notion	classe entière
2	Cours et exercices devoir à la maison (pour la séance 5 ?)	classe entière
3	Cours et exercices	classe entière
4	module	demi-classe
5	module	demi-classe (non filmé)
6	bilan	classe entière (non filmé)
7	contrôle	(non filmé)

[50] Voir ANNEXES : correspondance avec Mme B.
[51] Voir ANNEXES : feuille de cours de Mme B.

3) Inventaire des tâches données en classe

Les différentes tâches données lors des séances d'exercices sont analysées a priori, puis en fonction de leur déroulement. Les énoncés tels qu'ils ont été distribués aux élèves sont donnés en annexe[52]. Nous ferons plus loin une analyse détaillée des tâches mathématiques correspondantes, mettant en jeu la notion de triangles semblables. Mais il y a aussi des connaissances plus anciennes – pour les élèves – qui interviennent dans les exercices faits en classe :

- la somme des angles d'un triangle
- des propriétés de triangles particuliers (triangle rectangle ou équilatéral)
- le théorème de l'angle inscrit dans un cercle
- les égalités d'angles définis par deux parallèles et une sécante ou d'angles opposés par le sommet
- la propriété de Thalès et sa réciproque
- le calcul algébrique (produits en croix), mais pas de résolution d'équations "avec x"
- certains cas d'isométrie de deux triangles

Les connaissances nouvelles qui sont présentées dans le cours au fur et à mesure et mises en fonctionnement dans les exercices faits en classe sont les suivantes – nous donnerons plus loin l'ordre dans lequel elles ont été introduites, et de quelle façon :

- **- D1** : la définition de "triangles semblables" donnée au début du cours : "deux triangles semblables ont leurs trois angles respectivement de même mesure"
- **- D'1** : la définition de triangles semblables *simplifiée* obtenue après les premières applications et donnée en remarque : "pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux"
- **- P1** : la propriété : "si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont proportionnels"
- **- P'1** : la propriété réciproque : "si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ils sont semblables"

[52] voir ANNEXES : énoncés distribués par Mme B. (cours, modules, devoir, contrôle)

- **- P2** : la propriété : "si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en MNP alors aire (MNP) = k^2 * aire (ABC)"

- **- P3** : la propriété : "deux triangles ayant un angle de même mesure compris entre deux côtés proportionnels sont semblables"

Nous distinguerons par la suite, pour simplifier l'analyse des exercices de manuels, plus particulièrement trois types de propriétés :

- les propriétés *"directes"* qui permettent de démontrer que des triangles sont semblables à partir de leurs angles ou des longueurs de leurs côtés (propriétés D1 et D'1, P'1, P3)

- les propriétés *"indirectes"* qui, à partir de la similitude de deux triangles, permettent de déduire des propriétés sur leurs angles ou leurs côtés (propriété P'1)

- les propriétés relatives à l'*aire* des triangles (propriété P2);

Nous nous intéresserons au cours portant sur ces notions nouvelles – à ce qui a été démontré ou non, au moment où ce cours intervient par rapport aux séances d'exercices. Nous analysons aussi le travail de ces propriétés nouvelles dans les exercices donnés aux élèves. Nous regarderons si ces propriétés sont travaillées seules ou combinées les une aux autres, et dans quel ordre.

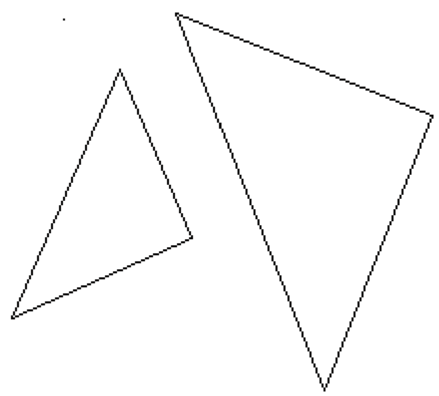
Dans le tableau suivant, nous avons donné l'ordre dans lequel ont été introduites les six propriétés nouvelles du cours sur les triangles semblables, et les circonstances dans lesquelles ces notions ont été introduites. Nous avons en particulier indiqué les exercices qui succédaient – ou éventuellement précédaient – la donnée de ces connaissances en classe.

propriétés	Séances en classe	Exercices proposés à la suite
D1	Donnée au tout début du premier cours, après un rappel sur les triangles isométriques	2 ex sur D1
D'1	Donnée à retrouver aux élèves lors de la première séance	3 ex sur D'1
P1	Donnée aux élèves lors de la deuxième séance, découle d'un exercice fait en classe, admise mais à démontrer à la maison	1 ex sur P1
P2	Donnée aux élèves lors de la deuxième séance, non démontrée	Pas d'ex en classe, sauf plus tard en module
P'1	Donnée aux élèves lors de la troisième séance; démontrée en classe	Ex en module
P3	(non filmé) figure à la fin du cours distribué aux élèves, sans démonstration	Ex à la maison

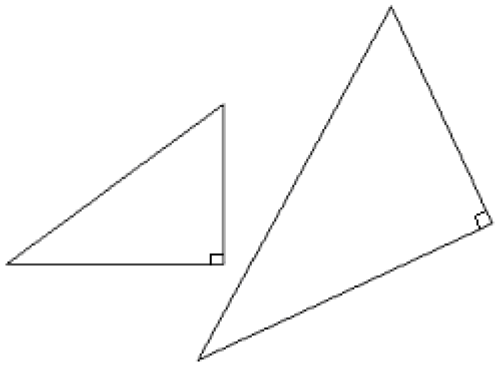
Nous pouvons déjà remarquer que certaines propriétés – les dernières abordées – sont moins travaillées que d'autres en classe, mais sont plutôt travaillées en module ou à la maison, peut-être pour des soucis de temps. Nous pouvons aussi voir que certaines notions nouvelles ont été introduites par des exercices qui permettaient aux élèves de trouver la connaissance visée avant qu'elle ne soit donnée "officiellement". Nous ne pouvons cependant pas en déduire l'influence sur les apprentissages : est-ce que les notions introduites de cette façon sont mieux assimilées par les élèves ?

Nous tenons compte aussi de la *configuration* dans laquelle les élèves sont amenés à travailler, c'est à dire le type de figure sur laquelle porte l'exercice. Ils rencontrent ici plusieurs types de configurations : (dont nous donnons la légende employée dans les tableaux qui suivent)

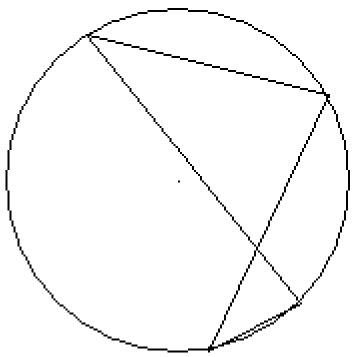
- deux triangles distincts (2 Δ)



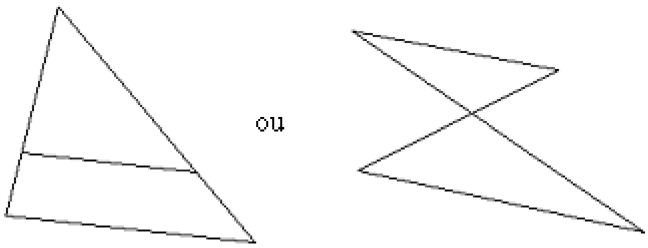
- deux triangles rectangles distincts (2 Δ rect)



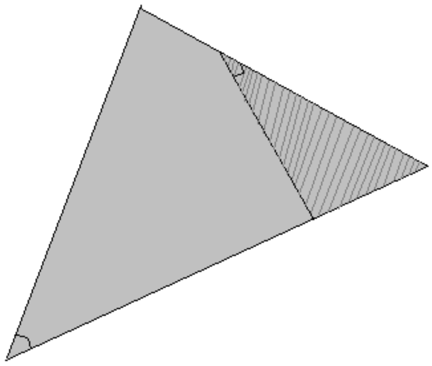
- un cercle et deux cordes ou plus (cercle)



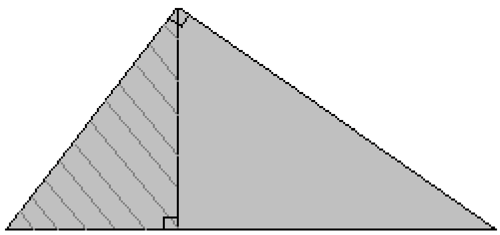
- la configuration de Thalès (Thalès)



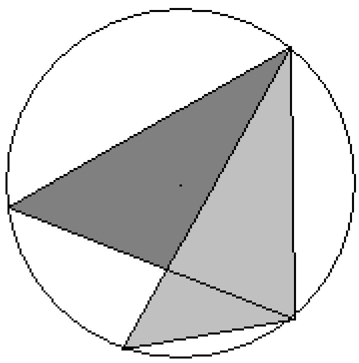
Nous distinguerons en particulier les configurations où les triangles semblables sont emboîtés (2 Δ emboîtés). Ce sont des configurations où les triangles ont des côtés non parallèles, et où, souvent, les triangles semblables ont des sommets communs – qui ne sont pas forcément des sommets homologues.



il peut s'agir de deux triangles rectangles (2 Δ rect emboîtés) :



ou de deux triangles inscrits dans un cercle (2 Δ emboîtés et cercle) :



Nous signalerons plus loin dans les exercices donnés en classe ceux qui correspondent à cette configuration, que nous considérons comme plus complexe que d'autres.

Nous avons tenu compte de chacune de ces variables pour analyser chaque exercice fait en classe, à la maison ou en contrôle, par les élèves.

4) Analyse a priori des tâches et activités mathématiques provoquées par les exercices donnés en classe

Nous allons donner l'analyse a priori des tâches et activités mathématiques que peuvent déclencher les exercices qui ont été donnés à faire en classe ou à la maison par le professeur, pendant les séances du chapitre sur les triangles semblables. Nous ne tenons pas encore compte des modifications de ces tâches qui pourraient être induites par les interventions du professeur, cela sera fait plus loin, après l'analyse du déroulement des activités qui en découlent. Toutefois, nous ne nous privons pas de certains commentaires liés à la classe[53].

Nous emploierons certaines abréviations pratiques pour alléger notre propos : par exemple, nous désignerons par "Pythagore" le théorème du même nom, et nous utiliserons parfois le terme "similitude" des triangles plutôt que l'expression "triangles semblables".

Nous retrouverons, après cette analyse détaillée, un tableau de synthèse prenant aussi en compte des éléments du déroulement

Nous analyserons plus loin les autres méthodes qui permettraient de résoudre efficacement ces exercices, sans faire appel aux triangles semblables, y compris en utilisant un logiciel de géométrie dynamique

Les figures sont faites ici pour la compréhension de la résolution, lorsque la configuration est un peu plus compliquée, mais elles ne sont pas toujours données par l'énoncé.

- 1ère séance

exercice 1

Soient ABC et RST deux triangles tels que A = 45°, B = 73°, R = 73° et S = 45°

Ces deux triangles sont-ils semblables ?

Cet exercice est donné juste après la définition des triangles semblables. Pour l'élève, il s'agit d'appliquer la seule définition à sa disposition. C'est une tâche isolée mais non simple, qui nécessite au préalable le calcul du troisième angle, à l'aide de la somme des angles d'un triangle, qui est une connaissance ancienne. Il y a donc une adaptation à faire en calculant un intermédiaire.

[53] c'est-à-dire tenant compte d'informations supplémentaires dont nous disposons sur ces séances.

exercice 2

ABC et MNP sont deux triangles rectangles respectivement en A et P tels que B = 60° et M = 60°

Ces deux triangles sont-ils semblables ?

Ici l'élève doit appliquer la définition après avoir reconnu un angle de 90° et calculé le troisième angle à l'aide de la somme des angles d'un triangle. Il y a donc là encore un calcul d'intermédiaire et le recours à une connaissance ancienne. Aucune reconnaissance des sommets homologues n'est nécessaire, les noms des triangles sont donnés dans le désordre.

exercice 3

pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient…

le démontrer

Les élèves découvrent ici la propriété nouvelle, la phrase à trou permet de tirer une conclusion des deux exercices précédents, en comparant les hypothèses de la définition de départ, et celles qui ont suffi dans ces exercices à montrer la similitude. La structure de l'énoncé laisse peu de choix à l'élève, qui n'a qu'une tâche simple et isolée à effectuer.

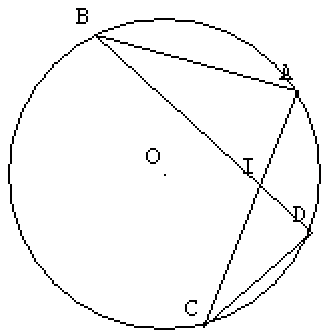
exercice 4

Citer des triangles semblables

Les élèves doivent faire appel à des connaissances anciennes sur les triangles particuliers, pour déterminer ceux dont on connaît toujours au moins deux angles. Il suffit d'appliquer la définition pour vérifier que les triangles connus des élèves – et il y en a peu à tester – sont semblables. Ceci n'est pas une tâche simple, sauf si le professeur prend en charge les rappels de cours nécessaires au préalable. Sauf dans ce cas, les connaissances anciennes utiles ici sont supposées mobilisables. Les réponses attendues sont : les triangles équilatéraux et les triangles rectangles isocèles.

exercice 5

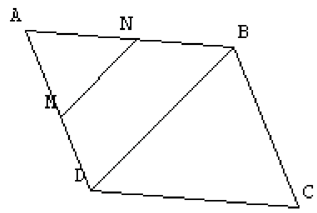
(C) est un cercle. Soit I point situé dans le cercle. Deux cordes du cercle [AC] et [BD] sont sécantes en I (on évitera que I soit confondu avec le centre du cercle). Démontrer que les triangles IAB et IDC sont semblables (la figure est donnée)



Il s'agit ici encore d'appliquer la définition, en démontrant au préalable l'égalité de deux paires d'angles, l'une à l'aide du théorème de l'angle inscrit (deux possibilités), l'autre à l'aide d'angles opposés par le sommet. Il y a donc un calcul d'intermédiaires. Il faut aussi associer correctement les angles homologues, mais les lettres sont données dans l'ordre dans l'énoncé, ce qui facilite le travail de l'élève, s'il ne remet pas cet ordre en question. (Exercice repris lors de la séance suivante)

- 2ème séance

exercice 6
ABCD est un parallélogramme. Le point M de [AD] et le point N de [AB] sont tels que la droite (MN) est parallèle à la droite (BD)
1) démontrer que les triangles AMN et ADB sont semblables
dans quelle configuration sont placés les triangles AMN et ADB
écrire les rapports de longueurs qui en découlent
2) démontrer que les triangles AMN et CDB sont semblables
peut-on écrire une égalité de rapport ? si oui, laquelle ?
3) que peut-on conjecturer ?



Dans la première question, il faut encore utiliser la définition, avec cette fois-ci un intermédiaire qui consiste à démontrer l'égalité des angles correspondants (définis par deux parallèles et une sécante). Les noms des triangles sont donnés dans l'ordre. La fin de la question ne mobilise pas de propriété nouvelle, l'élève doit reconnaître la configuration de Thalès et appliquer le théorème.

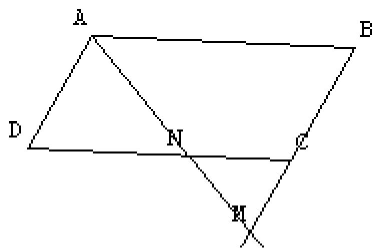
Pour la deuxième question, on applique toujours la même définition, mais cette fois-ci les lettres ne sont pas dans le bon ordre. L'égalité des angles se fait par transitivité : les triangles ABD et CDB sont isométriques, grâce aux propriétés du parallélogramme, donc on en déduit l'égalité des angles et la similitude. On utilise alors P1 le résultat de la question précédente pour déduire un rapport de longueur entre les deux triangles semblables.

Dans la dernière question, il faut en déduire la propriété visée, en repérant les hypothèses de départ et la conclusion obtenue.

Cet exercice, malgré des questions qui structurent la démonstration, est une succession de tâches isolées mais non simples.

- 3ème séance

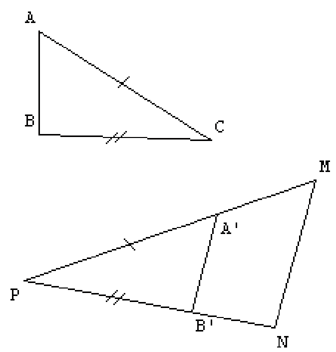
exercice 7 *ABCD est un parallélogramme, N est un point du segment [DC] distinct de D et C, le droite (AN) coupe (BC) en M* *1) démontrer que les triangles ADN est ABM sont semblables* *2) en déduire que DN x BM = AB x AD*



On applique encore ici la définition, après avoir démontré deux égalités d'angles : alternes-internes et angles opposés du parallélogramme. Les sommets homologues ne sont pas donnés dans l'ordre.

On applique ensuite la propriété P1 pour obtenir les rapports de longueurs, puis on effectue les produits en croix pour déduire l'expression demandée. Il faut donc reconnaître la nécessité d'appliquer P1, qui n'est pas explicitement demandée (il y a des produits dans l'énoncé, et non des rapports). Même si l'élève manipule ici des expressions littérales, il n'y a pas vraiment de résolution algébrique, et pas de mélange de registre ici. Le fait que l'exercice soit découpé en deux questions simplifie le travail de l'élève, qui n'a qu'à mobiliser une seule propriété nouvelle à la fois. Dans cet exercice, pour la première fois, les triangles semblables sont mobilisés en tant qu'outil, pour obtenir une propriété sur les longueurs, cependant, à cause du découpage en deux questions, c'est sur les propriétés nouvelles que l'élève travaille, et non vraiment encore à l'aide de ces propriétés.

exercice 8
démonstration de la réciproque : "si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ils sont semblables"
dessiner deux triangles ABC et MNP tels que
AB = 3, BC = 5 et AC = 6
PM = 9, MN = 4.5 et PN = 7.5
Montrer que les côtés des triangles ABC et MNP sont proportionnels
Dans le triangle MNP, construire
le point A' sur [PM] tel que PA' = CA
le point B' sur [PN] tel que PB' = CB
montrer que les droites (A'B') et (MN) sont parallèles
en déduire que les triangles ABC et MNP sont semblables



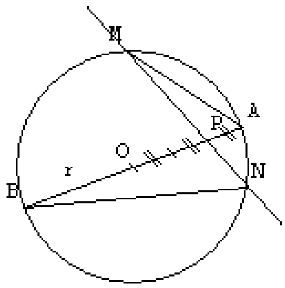
On peut considérer que les tâches de construction des triangles ne représentent pas de difficulté pour des élèves de ce niveau. Pour prouver la proportionnalité des côtés, il leur faut les classer dans l'ordre puis calculer les rapports.

En utilisant ce résultat dans la question suivante, et en remplaçant les longueurs par des longueurs qui leur sont égales par construction, on se retrouve dans la configuration de Thalès, et la réciproque du théorème nous donne le parallélisme de (A'B') et (MN). On démontre alors les égalités des angles correspondants, ce qui nous permet, en appliquant la définition, de montrer la similitude des triangles.

Il s'agit donc ici d'une succession de tâches non simples, qui nécessitent, pour la dernière, une introduction d'étapes.

- $4^{ème}$ séance (module)

exercice 9 *(C) est un cercle de centre O et de rayon r, [AB] est un diamètre de (C) et P est le point de [AB] tel que AP = 1/3 r* *une droite d distincte de la droite (AB) passe par P et coupe le cercle en deux points M et N* *1) démontrer que les triangles APM et NPB sont des triangles semblables* *2) En déduire que PM x PN = 5/9 r²*



La configuration dans cet exercice ressemble à celle de l'exercice 5. La première question est alors identique (utilisation du théorème de l'angle inscrit et des angles opposés par le sommet pour démontrer la similitude à l'aide de la définition)

Pour la deuxième question, il s'agit de la propriété P1 appliquée aux deux triangles semblables dont les sommets homologues sont donnés dans l'ordre. Les rapports de longueurs, puis les produits en croix donnent une expression dans laquelle il faut remplacer AP par 1/3 r et PB par 2r – 1/3 r, c'est-à-dire 5/3 r. Ce calcul fractionnaire n'est pas une difficulté pour des élèves de 2^{nde}, mais peut-être seront-ils déstabilisés par le changement de cadre.

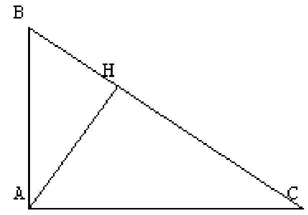
exercice 10

Soit ABC un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur issue de A

1) prouver que les triangles AHB et AHC sont semblables au triangle ABC

2) déterminer les rapports aire ABH / aire ABC et aire ACH / aire ABC en fonction de AB, AC et BC, puis en déduire le rapport (aire ABH + aire ACH) / aire ABC en fonction de AB, AC et BC

3) en déduire le théorème de Pythagore



Dans la première question, il faut démontrer que les triangles ont un angle droit et un angle commun. On applique donc la définition sans introduire d'intermédiaire pour montrer la similitude. L'élève doit choisir l'ordre dans lequel il démontre les deux similitudes, mais les deux choix sont équivalents.

Pour déterminer les rapports d'aires, il faut d'abord déterminer les rapports de similitude. Les homologues n'étant pas donnés dans l'ordre, il faut au préalable les associer correctement.

On a, en utilisant l'écriture des homologues l'un en dessous de l'autre :

HBA HAC

↓↓↓ et ↓↓↓

ABC ABC

Ce qui nous donne les rapports suivants :

HB / AB = BA / BC = HA / AC et HA / AB = HC / AC = AC / BC

De plus, les aires des trois triangles s'expriment ainsi, à l'aide de la formule :

aire ABC = AB x AC / 2

aire HBA = HB x HA / 2

aire HAC = HA x HC / 2

Donc finalement on a, en simplifiant et en transformant le quotient de produits en produits de quotients, simplifiable lui aussi grâce aux rapports ci-dessus :

aire ABH / aire ABC = (HB x HA / 2) / (AB x AC / 2) = (HB / AB) x (HA / AC) = $(BA / BC)^2$

aire AHC / aire ABC = (HA x HC / 2) / (AB x AC / 2) = (HA / AB) x (HC / AC) = $(AC / BC)^2$

Enfin, en additionnant les deux quotients obtenus, et en simplifiant :

(aire ABH + aire AHC) / aire ABC = $(BA / BC)^2 + (AC / BC)^2 = (BA^2 + AC^2) / BC^2$

Comme la somme des aires des petits triangles est égale à celle du grand, le quotient calculé vaut 1, et par conséquent :

$BA^2 + AC^2 = BC^2$, ce qui nous donne bien le théorème de Pythagore.

Dans cet exercice, après avoir trouvé la similitude et les rapports de longueurs de manière assez classique, le calcul littéral pour exprimer les rapports des aires s'avère assez long et compliqué. Le changement de cadre peut mettre l'élève en difficulté, mais pour les propriétés nouvelles qui nous intéressent ici, il n'y a pas d'adaptation particulière à effectuer.

Pour la première fois, les triangles semblables sont un outil pour démontrer une propriété autre que portant sur les triangles semblables, on re-démontre ici le théorème de Pythagore, même si les élèves ne peuvent pas savoir si c'est légitime. Cependant, l'exercice étant très guidé par le découpage des questions, il est probable que pour les élèves il s'agit d'utiliser les propriétés nouvelles parce qu'elles sont dans le cours récent, et non pas parce qu'elles s'avèrent pertinentes pour démontrer Pythagore. Il peut être intéressant ici de voir quel discours accompagne la correction à ce sujet[54].

- 5ème séance (module)

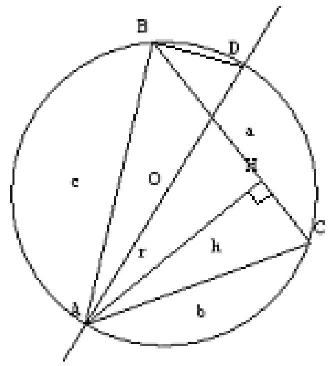
[54] malheureusement c'est impossible : les séances de module ne font pas l'objet d'une correction collective

exercice 11

(C) est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans (C), [AH] est une hauteur du triangle ABC. La droite (AO) recoupe le cercle (C) en D

1) démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables

2) on pose AB = c, AC = b et AH = h, déduire de la question précédente que bc = 2 rh



On montre la similitude à l'aide de la définition. En effet, le triangle ABD est rectangle en B car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AD], donc les deux triangles ont un angle droit, et les angles C et D sont égaux d'après le théorème de l'angle inscrit. Il y a donc introduction d'intermédiaires. Les noms des triangles sont cependant donnés dans le bon ordre.

On applique ensuite la propriété P1, et l'on effectue les produits en croix, les sommets homologues étant ici donnés dans l'ordre. On remplace les longueurs par les lettres correspondantes, et l'on obtient l'égalité souhaitée. L'utilisation de l'algèbre intervient après l'application de la connaissance nouvelle.

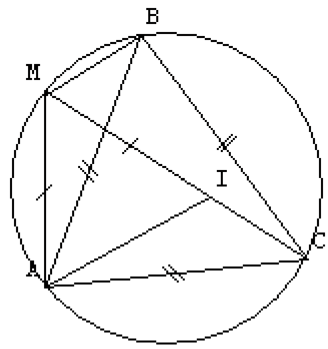
exercice 12

ABC est un triangle équilatéral et (C) est son cercle circonscrit. M est un point de l'arc AB du cercle (C) ne contenant pas le point C, I est le point de la corde [MC] tel que MI = MA

1) démontrer que les triangles ABC et AMI sont de même forme

2) démontrer que les triangles AMB et AIC sont isométriques

3) en déduire que MA + MB = MC



On peut, sachant que le triangle AMI est isocèle, et en utilisant les angles inscrits, démontrer qu'il a un angle de 60°, et qu'il est donc équilatéral lui aussi, les deux triangles ont alors la même forme, comme cela a été vu à l'exercice 3. On pourrait aussi utiliser ici pour démontrer la similitude la propriété P3, car il y a un angle identique (angles inscrits) et deux côtés proportionnels. Les noms des triangles sont donnés dans le bon ordre.

On utilise ensuite ce résultat pour démontrer l'isométrie, en utilisant le cas d'égalité "deux côtés égaux et un angle égal entre les deux" (cet angle égal s'obtient en remarquant que CAI = 60° - BAI = BAM)

On a donc, en remplaçant par les longueurs égales : MA + MB = AI + IC = MI + IC = MC :

A travers les deux exercices proposés dans cette séance de module, les triangles semblables ont permis de démontrer des propriétés métriques nouvelles – assez visuelles dans l'exercice 12 – de configurations géométriques simples. Cependant, le découpage des questions, et en particulier, la distinction entre la démonstration de la similitude et ses conséquences métriques, ne permet peut-être pas de dégager pour les élèves la notion de triangles semblables comme un outil performant. Une fois encore, tout dépend un peu de la gestion choisie par le professeur, dont nous n'avons pas de trace ici[55].

- devoirs à la maison

[55] séance non filmée

exercice 13

démonstration de la propriété : "si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés sont proportionnels"

Soient deux triangles ABC et MNP tels que A = M et B = N

1) que peut-on dire des triangles ABC et MNP ?

2) construire le triangle PRS tel que

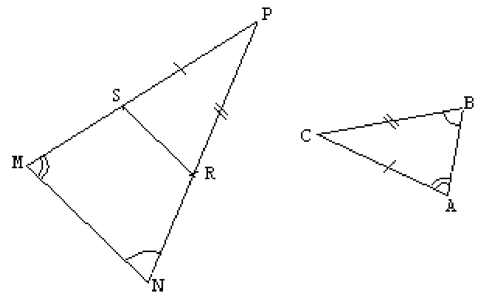
PR = CA avec R ∈ [PM]

PS = CB avec S ∈ [PN]

Que peut-on dire des triangles ABC et PRS ?

3) démontrer que les droites (RS) et (MN) sont parallèles

4) conclure



La première question est une application immédiate de la définition de deux triangles semblables (tâche simple et isolée)

La deuxième question est une application immédiate d'un cas d'égalité des triangles isométriques

La troisième question découle de l'isométrie : les triangles égaux ont des angles égaux, qui, placés en positions d'angles correspondants, entraînent le parallélisme des deux droites.

Ensuite, ayant reconnu une configuration de Thalès, on démontre la proportionnalité des côtés.

Cet exercice est découpé en tâches isolées, souvent simples, qui ne nécessitent pas, de la part de l'élève, la mise en place d'une méthode de démonstration.

exercice 14

ABC est un triangle isocèle de sommet A, H est le pied de la hauteur issue de A, on donne BC = 160 mm et AH = 60 mm

1) faire une figure

2) calculer AB et AC

3) D est le point de [BC] tel que BD = 35 mm et E le point de [BA] tel que BE = 56 mm

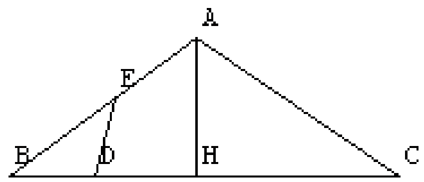
a) démontrer que les triangles BAC et BDE sont semblables

b) en déduire ED

4) calculer AD

5) a) prouver que le triangle DAC est rectangle en A

b) montrer que les points E, A, C, D sont sur un même cercle dont on donnera le diamètre



Pour la première question, toutes les informations sont données pour construire la figure.

Dans la deuxième question, les élèves doivent utiliser le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs demandées. Les angles droits sont clairement indiqués dans l'énoncé et ne sont donc pas à re-démontrer (ce qui n'aurait pas été le cas, par exemple, si (AH) avait été la médiane issue de A) mais il est tout de même nécessaire de savoir que la hauteur et la médiane issues du sommet isocèle sont confondues, afin de connaître les longueurs BH et HC et pour pouvoir calculer les longueurs manquantes. Le théorème n'est à appliquer qu'une seule fois, puisque les longueurs cherchées sont égales : ce sont les côtés égaux du triangle isocèle.

Pour la question 3) a), il faut appliquer la propriété P3 : "si deux côtés sont proportionnels, et que l'angle entre ces deux côtés est le même, alors les triangles sont semblables". Les noms des triangles sont donnés dans le bon ordre. Les quatre longueurs des côtés proportionnels sont connues (BD et BE, BA et BC) et il suffit de les associer correctement (les deux plus petites ensembles) et l'angle B est commun aux deux triangles. Il n'y a donc pas ici d'adaptation de P3 à réaliser, toutes les données nécessaires sont déjà calculées.

On en déduit ED au b) à l'aide de la propriété P1 (triangles semblables => côtés proportionnels) ou de la constatation que les deux triangles qui sont semblables sont par conséquent tous deux isocèles.

Le calcul de AD à la question 4) se fait à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle DAH, et nécessite au préalable le calcul de la longueur DH = BH – BD.

Pour la question 5), il faut utiliser cette fois-ci la réciproque du théorème de Pythagore pour prouver que le triangle ADC est rectangle en A. On en déduit que A appartient au cercle de diamètre [DC]

Pour la dernière question, il faut prouver que le triangle DEC est rectangle en E

Les deux exercices suivants n'ont pas été filmés. Il semblerait qu'une partie de la classe ait été alors absente pour cause de stage de ski. Pour ces élèves-là, un bilan de ce qui a été fait pendant leur absence est organisé par le professeur et les élèves.

exercice 15

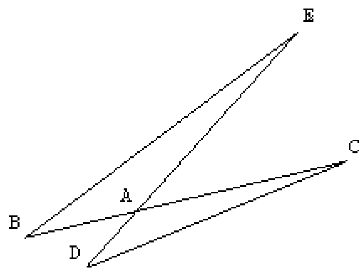
Les droites (BC) et (DE) sont sécantes en A

On donne AB = 28, AE = 96, AD = 21 et AC = 72 (les mesures sont en mm)

démontrer que les triangles DAC et BAE sont semblables

Quel est le rapport des aires de ces triangles ?

(la figure est fournie)



Dans la question 1) de cet exercice, il faut appliquer la "variante" P3 : "deux côtés proportionnels et un angle égal entre les deux => triangles semblables". Pour cela, il suffit d'associer les bonnes longueurs ensembles et de remarquer que l'angle A est le même pour les deux triangles (angles opposés par le sommet). Les noms des triangles sont donnés dans l'ordre. Il n'y a donc ici qu'une reconnaissance des modalités d'application.

Pour la deuxième question, il suffit d'appliquer la propriété P2 "le rapport des aires est égal à k^2". Ce rapport a déjà été calculé à la question précédente. Il s'agit encore d'une application directe de la propriété visée.

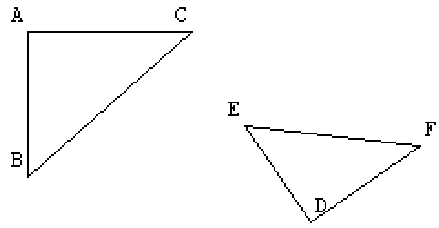
exercice 16

soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 2 et BC = 3 et DEF un triangle rectangle en D tel que ED = 1,6 et EF = 2,4

1) démontrer que les triangles ABC et DEF sont semblables

2) indiquer les sommets homologues

3) calculer le rapport (aire ABC) / (aire DEF)



Dans la question 1) il faut utiliser le fait que les deux triangles sont rectangles (un angle commun) et ensuite appliquer la variante P3. Pour cela, il y a deux possibilités : il faut au préalable calculer le 3ème côté du triangle rectangle à l'aide de Pythagore, ou bien calculer à l'aide de leur cosinus les angles B et E pour montrer qu'ils sont égaux, les noms des triangles étant ici donnés dans le bon ordre.

La deuxième question est étrange : il serait logique d'avoir repéré les homologues pour résoudre la question précédente ! Ce repérage est encore plus facile, une fois calculé un angle ou un côté de plus dans chacun des triangles.

Pour la troisième question, il faut calculer le rapport de similitude (à partir de deux côtés homologues) et le mettre au carré pour obtenir le rapport des aires. C'est donc une application simple de P2.

Voici donc les tâches telles qu'elles ont été données à faire aux élèves en classe ou à la maison. Nous allons voir maintenant comment ces tâches ont pu être réellement abordées par les élèves, en tenant compte du déroulement des séances et des modifications apportées par les interventions du professeur.

5) Description du déroulement

a) Tableau récapitulatif des tâches en classe

Voici un tableau récapitulant nos observations lors des séances dans cette classe. Les colonnes reprennent pour chaque exercice toutes les variables énoncées dans le chapitre explicitant notre méthodologie :

- la configuration,
- les connaissances (anciennes ou nouvelles) utilisées,
- leur niveau de mise en fonctionnement,

et pour le déroulement de l'activité :

- le temps de silence (et leur moment)
- et les aides du professeur (leur nature, leur moment et leur forme)

ex	Conf	Connaissances		Niveau de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles	Déroulement			
		Anciennes supposées disponibles	Nouv		Tps silence	Aides du professeur		
						Nature	Moment	Forme
1	2 Δ	somme angles du triangle	D1	calcul d'intermédiaires (comparer le 3ème angle)	2min55 au début	mise en route méthode	après recherche	question ouverte rappel de cours consigne (*justifier*)
2	2 Δ rect	somme angles, Δ particuliers	D1	calcul d'intermédiaires (comparer le 3ème angle)	2min40 au début	méthode	après recherche	question (*"qu'est-ce qui manque ?"*)
3	2 Δ	somme des angles	D1	reconnaissance des modalités d'application	0min	méthode	pendant tout l'ex	questions ouvertes puis de + en + fermées
4	2 Δ	Δ particuliers	D'1	reconnaissance des modalités d'application	1min après le début	méthode	pendant recherche	questions fermées rappel (*lien ancien-nouveau*)
5	cercle	angle inscrit ou égalité d'angles	D'1	reconnaissance des modalités d'application	6min50 au début	activité méthode	au début	consignes questions de + en + fermées phrases à compléter consignes
6 1)	Thalès	égalité d'angles, Thalès	D'1	reconnaissance des modalités d'application	2min05 après le début	outil méthode activité	au début	questions ouvertes puis de + en + fermées rappel, conseils, phrases à compléter, consignes
2)	Thalès	égalité d'angles, Thalès	D'1	reconnaissance des modalités d'application				
3)		Algèbre			à finir à la maison			
7 1)	2 Δ	égalités d'angles	D'1	reconnaissance des modalités d'application	0min	méthode	pendant tout l'ex	rappels *lien ancien-nouveau* questions ouvertes puis de + en + fermées, phrases à compléter conseils
2)	2 Δ	Algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application, utilisation des questions précédentes (indiqué)				
8	Thalès	Thalès, égalité d'angles	D'1	reconnaissance des modalités d'application	1min	registre méthode activité	pendant tout l'ex fin	questions ouvertes puis de + en + fermées, phrases à compléter discours non mathématique consignes
9 1)	cercle	angle inscrit	D'1	reconnaissance des modalités d'application	46min	module 1 aides individuelles		
2)	cercle	Algèbre	P1	calcul d'intermédiaires (établir PB=5/3 r), utilisation des questions précédentes (indiqué)				
10		le 2ème exercice de la séance de module ne semble pas avoir été abordé						
11	cercle Δ emboîtés	Δ rect et cercle, angle inscrit	D'1	introduction d'étapes	1 séance	module 2 (non filmé) le 2ème l'exercice n'a peut-être pas été abordé par tous les élèves		
		algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application				
12	cercle	angle inscrit	P3	introduction d'étapes				
	cercle	triangles iso						
13	2 Δ	Thalès	D'1	reconnaissance des modalités d'application	à la maison, énoncé et corrigé très détaillés			
14	2 Δ rect emboîtés	Pythagore	P3	reconnaissance des modalités d'application	à la maison, distribution d'un corrigé détaillé			
		algèbre sans x	P'1	reconnaissance des modalités d'application				

b) Commentaires sur les tâches proposées et leur déroulement

Nous avons regardé pour chaque exercice le type de tâche demandé, la configuration géométrique dans laquelle se situe l'exercice, le niveau de mise en fonctionnement associé et les connaissances utilisées (nouvelles et anciennes). Nous avons aussi observé pendant les séances en classe certaines variables liées au déroulement et essentielles à notre étude. Nous avons détaillé dans le tableau ci-dessus tous ces éléments relatifs à chaque tâche proposée.

Nous avons donc relevé, à partir des vidéos et grâce à une nouvelle lecture de cette première synthèse, certaines caractéristiques du déroulement des activités des élèves.

- Les répétitions de tâches

Nous remarquons tout d'abord la répétition de certaines tâches données aux élèves, associées cependant à des variables différentes. Par exemple, l'application de la $2^{ème}$ définition D'1 (2 angles égaux => triangles semblables) a été proposée dans 7 tâches plus ou moins différentes. Nous pouvons supposer que la répétition de certaines tâches, malgré les simplifications opérées, permettra peut-être un apprentissage chez les élèves.

- La difficulté des tâches

Nous regardons aussi le travail effectué sur les différents niveaux de mise en fonctionnement des notions nouvelles : nous remarquons que le niveau le plus simple selon nous, la reconnaissance des modalités d'application, a été travaillé une dizaine de fois, alors que d'autres, plus difficiles selon nous, ont été moins sollicités (trois fois l'introduction d'intermédiaires et deux fois l'utilisation des questions précédentes), tandis que certains n'ont pas été abordés du tout (l'introduction d'étapes). Les élèves sauront-ils alors surmonter, s'ils le rencontrent en contrôle, l'obstacle d'un niveau de fonctionnement "plus élevé" que ceux auxquels ils ont été habitués sur ces notions ?

- La variété des tâches et applications proposées

Nous pouvons remarquer que certaines tâches paraissent classiques, il s'agit de celles qui font intervenir la propriété directe D'1 (deux angles égaux => triangles semblables) puis qui utilise la proportionnalité des côtés P1 (triangles semblables => côtés proportionnels) pour démontrer une égalité de longueurs (souvent une égalité de produits de longueurs). On retrouve trois fois cette combinaison de propriétés en classe, que l'on retrouvera aussi dans les exercices du contrôle.

- le type de travail des élèves

Nous avons aussi tenu compte de la forme des activités des élèves et des accompagnements du professeur. Le travail des élèves est individuel, le plus souvent, sauf lors des modules où de petits groupes de quatre élèves sont formés (nous n'avons pas d'information sur la façon dont ont été formés ces groupes). Nous n'avons pas accès au travail des élèves à la maison, bien que le professeur leur donne des devoirs à la fin de chaque cours, notés ou non.

- les aides apportées par le professeur

Nous avons relevé toutes les aides prodiguées par le professeur : ce sur quoi elles portent, leur forme et leur moment dans l'activité. Nous remarquons que ces aides portent systématiquement sur la méthode, parfois sur la mise en route, et qu'elles peuvent être plus ou moins directives pour les élèves. Les exercices proposés par le professeur sont parfois d'une certaine difficulté, mais ce qui reste à faire aux élèves est rarement aussi complexe que les tâches proposées a priori ; en effet, de nombreuses difficultés sont prises en charge et simplifiées par celui-ci, au cours du déroulement.

- le traitement des homologues

Les sommets des triangles sont souvent écrits dans le bon ordre dans les énoncés (11 fois sur les 15 configurations rencontrées). Au fur et à mesure que les exercices proposés se compliquent au cours du chapitre, les noms des triangles ne sont plus jamais donnés dans le désordre, peut-être pour ne pas rajouter une adaptation au travail des élèves. Si les aides du professeur portent tout de même parfois sur le repérage des homologues, ce n'est pas en leur apportant une méthode pour effectuer cette tâche, mais plutôt en leur rappelant qu'il faut le faire.

- La progression des tâches et activités

Les tâches proposées par l'enseignant sont de plus en plus complexes, mais les interventions du professeur elles-aussi évoluent au fur et à mesure que les tâches se compliquent.

Nous avons noté que le temps de recherche laissé aux élèves lors des séances d'exercices diminue, proportionnellement au temps passé sur l'exercice, lorsque la difficulté des tâches augmente (selon notre classification). En effet, nous pouvons constater que pour les activités d'introduction du cours, relativement simples, le temps de recherche représente au moins le tiers du temps de l'exercice, tandis que pour des activités plus complexes, le temps de recherche ne dépasse pas le dixième du temps de l'exercice.

Suivant le degré de complexité de l'exercice, les aides apportées aux élèves ne sont pas données au même moment. Pour les applications les plus simples, les élèves cherchent d'abord seuls, sans indication, puis le professeur prend la parole et oriente leur travail ; pour les exercices plus complexes, le professeur indique d'abord comment résoudre, puis laisse un peu de temps aux élèves pour effectuer les tâches ainsi découpées, souvent en début de l'activité. Les aides apportées dans ce cas sont beaucoup plus ciblées : une série de questions de plus en plus fermées et des phrases inachevées à compléter dirigent le travail de l'élève sans lui laisser beaucoup d'initiatives.

Au fur et à mesure que les exercices se compliquent, le professeur pose des questions de plus en plus fermées pour relancer le travail des élèves. Les difficultés de mise en fonctionnement n'ont donc pas été prises en charge par les élèves. Dans six exercices sur les huit faits en classe, le professeur expose la méthode assez tôt en début d'exercice, puis laisse les élèves en effectuer l'application. Il s'agit en fait ici certainement de maintenir les élèves dans l'activité, quitte à simplifier beaucoup le problème pour qu'une majorité des élèves puisse effectivement travailler.

- le type de correction

Nous avons tenu compte du type de correction des exercices proposés, qui est écrite au tableau par un élève, même si c'est souvent le professeur qui la dicte, insistant beaucoup au tableau sur le recours au modèle donné en cours. Ici, par exemple, il engage les élèves à utiliser systématiquement une écriture des points "l'un en dessous de l'autre".

Ces analyses de déroulement, complétées par les analyses des tâches a priori, nous renseignent plus précisément, pour chaque tâche et compte tenu des interventions du professeur, sur ce que l'élève a vraiment pu faire en classe, c'est-à-dire ce qui est resté à sa charge malgré les aides du professeur, et ce qu'il a à sa disposition, au moment où lui est donnée la tâche, pour la résoudre.

Il est intéressant pour nous de faire un bilan de ce qui est dévolu aux élèves pendant ces séances, pour savoir quelles autonomies leurs sont laissées en cours, et quelles habitudes ils peuvent avoir dans leur travail sur cette notion. Lors du contrôle, leur autonomie sera évidemment totale, et il est possible que ce qu'ils n'ont jamais eu à faire seuls auparavant leur pose alors un problème, si les questions du contrôle les y confrontent.

En tenant compte de tout ce que l'élève n'a pas eu à faire lui-même en classe, nous obtenons le tableau suivant :

ex	**type de tâche a priori : ASI ou adaptation**	**ce que l'élève cherche tout seul en classe**	**ce que l'élève fait tout seul en classe**	**connaissances nvelles**	**repérage des homologues en classe**	**prise en charge ancien/nouveau en classe**
1	calcul d'intermédiaires	démo (2min55)	ASI	D1		pas de mélange ancien-nouveau
2	calcul d'intermédiaires	démo (2min40)	ASI	**D1**	le prof insiste sur l'écriture des homologues	pas de mélange
3	reconnaissance des modalités		réponse à des questions à trou	**D1**		pas de mélange
4	reconnaissance des modalités	démo (1min) avec consignes	ASI	**D'1**		rappels sur les triangles particuliers
5	reconnaissance des modalités	démo (6min50)	dessin de la figure bavardage	**D'1**	le prof insiste sur l'écriture des homologues et les désigne	rappel sur l'angle inscrit
6 1)	reconnaissance des modalités	démo (2min05) avec consignes	ASI codage de la figure	**D'1**		des élèves (angles correspondants)
6 2)	reconnaissance des modalités		réponses à des questions à trou copie	**D'1**	le prof aide à trouver les sommets homologues	le prof (Thalès, isométrie)
7 1)	reconnaissance des modalités	ASI	réponses à des questions à trou	**D'1**, P1, P3	le prof insiste sur l'écriture des homologues	
7 2)	reconnaissance des modalités	ASI	réponses à des questions à trou	D'1, **P1,** P3	le prof aide au repérage des homologues	rappels sur la proportionnalité
8	reconnaissance des modalités	(préparé à la maison)	réponse à des questions à trou correction collective	**D'1**, P1, P'1, P3		aides du prof (Thalès)
9 1)	reconnaissance des modalités	démo (46min) sans aide à la classe	remplit une feuille de réponse par groupe de 4	**D'1**, P1, P'1, P2, P3	le prof insiste plusieurs fois sur l'écriture des homologues	aide individuelles sur le théorème de l'angle inscrit
9 2)	calcul d'intermédiaires	démo (46min) sans aide à la classe	remplit une feuille de réponse par groupe de 4	D'1, **P1**, P'1, P2, P3		aide individuelles sur la résolution algébrique
11	introduction d'étapes	non filmé	non filmé	**D'1, P1**, P'1, P2, P3	non filmé	non filmé
12	reconnaissance des modalités	non filmé	non filmé	D'1, P1, P'1, P2, **P3**	non filmé	non filmé
13	reconnaissance des modalités	non filmé	non filmé	**D'1**, P1, P'1, P2, P3	non filmé	non filmé
14	reconnaissance des modalités	non filmé	non filmé	D'1, P1, **P'1,** P2, **P3**	non filmé	non filmé

Ce deuxième tableau nous indique plus précisément ce qu'ont eu à faire les élèves : par exemple, la définition D1 et la définition simplifiée D'1 ont été travaillées sept fois en tout avant que les autres propriétés du cours ne soient introduites. Pour les élèves, il n'y a pas alors de choix à faire sur les propriétés à utiliser, puisqu'ils en ont une seule dans leur cours sur les triangles semblables. Ce n'est pas le cas pour les applications suivantes, aussi nous pouvons considérer que, sauf si le professeur indique aux élèves quelle propriété il faut appliquer, l'adaptation à faire est plus compliquée lorsqu'un choix de propriété est possible.

Nous remarquons aussi la prise en charge du repérage des sommets homologues, qui est faite ici très souvent par le professeur, soit qu'il les indique, soit qu'il aide à leur repérage, soit qu'il insiste sur la nécessité de les repérer et de les écrire correctement. Dans tous les cas, et de manière plus ou moins directive, les élèves ne se posent pas – ou pas longtemps – la question du repérage des homologues, et on peut penser que cette étape nécessaire, puisque présente dans chaque exercice, ne sera peut-être pas maîtrisée par les élèves.

Globalement, ce tableau nous indique que les élèves ont réalisé des tâches plutôt simples et isolées, conséquences, souvent, des interventions du professeur. Pour confirmer cette évolution des tâches plus ou moins complexes vers des tâches plus simples, nous pouvons les mettre en évidence à l'aide d'un tableau rendant compte à la fois des interventions du professeur et de l'évolution des tâches.

Voilà les tableaux réalisés pour les exercices faits en classe entière, dont nous rappelons ici la légende, déjà expliquée dans notre méthodologie : nous indiquons l'évolution des tâches qui restent à faire aux élèves en utilisant dans les cases du tableau des couleurs de plus en plus claires pour les tâches de plus en plus simples. Dans les cases blanches, nous indiquons les interventions du professeur qui sont à l'origine de ces simplifications.

Intervention du professeur
Travail potentiel des élèves, NMF : choix et étapes
Travail potentiel des élèves, NMF : intermédiaires
Travail potentiel des élèves, NMF : reconnaissance
Un élève au tableau, correction, mise en commun

ex 1 : *Soit ABC et RST deux triangles tels que Â = 45°, B = 73°, R = 73° et S = 45°. Ces deux triangles sont-ils semblables ?*

2 min 55	les élèves cherchent seuls NMF : calcul d'intermédiaires
1 min 35	aide méthode : question fermées, simplification de la tâche
2 min	correction au tableau élève + professeur les élèves participent et copient
1 min	récapitulation par le professeur

ex 2 : *ABC et MNP sont deux triangles rectangles respectivement en A et P tels que B = 60° et M = 60°. Ces deux triangles sont-ils semblables ?*

1 min 10	mise en route
2 min 55	les élèves cherchent seuls NMF : calcul d'intermédiaires
1 min 25	aide méthode : rappel de la consigne et de la définition
1 min	aide méthode : il faut calculer le 3ème angle
1 min	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités d'application
2 min	correction au tableau élève + professeur les élèves participent et copient
1 min	récapitulation par le professeur

ex 3 : *démo de D'1 : "pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux"*

0 min 30	le professeur répond à la question à trou posée dans le cours
0 min 05	les élèves répètent la réponse
0 min 25	discours sur la démonstration
0 min 35	le professeur donne deux triangles, les élèves choisissent les noms des sommets
	consigne : donner les hypothèses
0 min 15	les élèves doivent donner les hypothèses puis choisir les deux angles égaux
0 min 05	le professeur demande ce qu'il faut calculer
0 min 10	les élèves cherchent puis répondent
0 min 05	le professeur demande comment calculer
0 min 05	les élèves cherchent
0 min 50	un élève donne la méthode et le calcul du 3ème angle, le professeur écrit
0 min 50	le professeur demande de recommencer pour le 2ème triangle, puis relance les élèves
0 min 25	le professeur aide à faire le calcul littéral, fait retrouver la connaissance ancienne
0 min 15	un élève répond
1 min 50	le professeur conclut la démonstration

ex 4 : *Citer des triangles semblables*

1 min	mise en place (le professeur écrit la consigne et la rappelle oralement)
1 min	recherche individuelle NMF : nécessité de faire des choix, mélange ancien - nouveau
1 min	le professeur pose des questions facilitant la recherche
4 min 45	mise en commun et commentaires de la prof et des élèves sur les différentes réponses

ex 5 : *(C) est un cercle. Soit I point situé dans le cercle. Deux cordes du cercle [AC] et [BD] sont sécantes en I (on évitera que I soit confondu avec le centre du cercle). Démontrer que les triangles IAB et IDC sont semblables (la figure est donnée)*

	mise en place, consigne : dessin de la figure,
6 min 50	les élèves dessinent, la prof se tait ou intervient individuellement NMF : intermédiaires
	interruption
1 min 10	questions pour lancer l'activité : "qu'est ce qu'on vous demande de démontrer ?"
7 min	un élève passe au tableau ; questions structurant la méthode : étapes, rappel de cours, rappel du modèle
	la prof dicte la solution au fur et à mesure que l'élève répond aux questions

ex 6 : *ABCD est un parallélogramme. Le point M de [AD] et le point N de [AB] sont tels que la droite (MN) est parallèle à la droite (BD)*
1) démontrer que les triangles AMN et ADB sont semblables
dans quelle configuration sont placés les triangles AMN et ADB
écrire les rapports de longueurs qui en découlent
2) démontrer que les triangles AMN et CDB sont semblables
peut-on écrire une égalité de rapport ? si oui, laquelle ?
3) que peut-on conjecturer ?

1 min	mise en route, le professeur dessine la figure au tableau
4 min 40	un élève au tableau, consigne : extraire les hypothèses de l'énoncé
	questions structurant la méthode : rappel de cours, choix de l'outil
2 min 05	laisse écrire l'élève
4 min 35	discussion de la solution de cet élève, puis d'un autre élève avec la classe
1 min 25	questions isolées ("à trous") pour construire la démo de l'isométrie de ABD et BCD
1 min 30	dicte la réponse, laisse l'élève écrire et commente
5 min 40	discussion sur les sommets homologues et la notation appropriée questions simples structurant la méthode
11 min 40	la prof fait le lien avec la question précédente et revient à la démonstration de la similitude grâce à une succession de nombreuses questions simples structurant la méthode, qu'elle récapitule régulièrement
1 min 10	exercice inachevé à terminer à la maison

ex 7 : *ABCD est un parallélogramme, N est un point du segment [DC] distinct de D et C, le droite (AN) coupe (BC) en M*
1) démontrer que les triangles ADN est ABM sont semblables
2) en déduire que DN x BM = AB x AD

4 min 10	mise en route / consigne : faire la figure tâche simple et isolée
2 min 20	élève au tableau qui écrit les hypothèses et la conclusion du problème
	questions sur la méthode,
0 min 50	l'élève écrit une première égalité d'angles
	le professeur désigne les angles égaux au tableau
2 min	solution d'un autre élève, explication au tableau pour la classe puis le professeur dicte à l'élève au tableau
0 min 55	le professeur récapitule, commente, propose une autre méthode
1 min 10	rappel du problème des sommets homologues et corrigé de la solution
1 min	mise en route de la 2ème question : le professeur demande "comment faire"
5 min 20	questions structurant la méthode : rappel de la propriété
	travail des élèves, NMF : intermédiaires
	consigne intermédiaire (étape de la méthode)
	travail des élèves (ASI)
	fait préciser les sommets homologues
	travail des élèves

ex 8 : *démo de P'1 "si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ils sont semblables"*

	la figure était à faire à la maison, les étapes sont proposées sur la feuille
1 min	mise en route : le professeur écrit l'énoncé, puis balise la méthode (étapes)
1 min 25	questions structurant la méthode : suggère un calcul consigne : il faut justifier
1 min	travail des élèves, NMF : intermédiaires commentaires individuels du professeur
3 min 20	aide au choix de la méthode et choix des côtés questions simples en désignant les éléments de la figure au tableau
	travail des élèves : calcul des rapports (ASI)
0 min 50	le professeur écrit la solution au tableau
0 min 35	le professeur suggère le lien entre les deux questions
0 min 25	une élève lui dicte sa réponse, qu'il commente
1 min	le professeur projette la figure à l'aide d'un rétroprojecteur questions d'élèves

Les derniers exercices ont été faits en module, et il est impossible de dresser les tableaux puisque chaque élève a alors son parcours propre.

Nous pouvons voir, à l'aide de ces tableaux que le travail des élèves ne se fait pas souvent sur des tâches complexes. En effet, pendant la durée de résolution d'une même tâche, le temps passé par les élèves sur des tâches plus simples est souvent beaucoup plus long que le temps passé sur la difficulté initiale.

Le niveau de mise en fonctionnement le plus complexe – la nécessité de faire des choix – n'a été travaillé en autonomie que pendant 1 minute, au maximum, et pour les élèves qui n'ont pas attendu la simplification donnée par le professeur. Lors des premiers exercices, les élèves ont tout de même pu chercher seuls les intermédiaires, mais dès que les difficultés s'accumulent – en particulier parce que les élèves ont plus de propriétés dans leur cours – le travail est plus balisé, il ne se fait plus que sur des applications simples et isolées, et souvent avec un élève au tableau qui écrit la solution.

Ces tableaux nous permettent de voir quel est le type de travail privilégié par le professeur sur ce chapitre, mais aussi l'évolution de ce travail au cours du chapitre. Ces choix et leurs interprétations pourront être nuancés avec la prise en considération des composantes personnelles et institutionnelles du métier d'enseignant pour ce professeur, dans notre chapitre suivant.

6) Analyse des tâches du contrôle et première comparaison avec les tâches et activités potentielles du cours

Nous utilisons, pour analyser les tâches du contrôle, les mêmes critères que pour les exercices du cours, énoncés précédemment.

a) Analyse des tâches du contrôle

Les connaissances nouvelles testées sont celles du cours sur les triangles semblables, et celles-là uniquement. Les connaissances anciennes qui sont sollicitées dans les exercices du contrôle sont à peu près les mêmes que celles qui ont été utilisées en classe. Il faut cependant y rajouter :

- la propriété de Pythagore
- les calculs d'angles par trigonométrie
- la résolution algébrique d'une équation "avec x"

Nous allons donner ici rapidement les énoncés et tâches a priori du contrôle. Cette analyse sera détaillée plus loin et complétée des réponses et erreurs des élèves.

exercice 1 :
ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables, les sommets A', B' et C' étant homologues respectivement de A, B et C.
Sachant que AB = 5, AC = 3 et BC = 7, déterminer x pour que A'B' = 7 + x et A'C' = x –2

Dans cet exercice, il s'agit d'une application immédiate de la propriété P1, sans aucune reconnaissance préalable nécessaire des homologues, qui sont ici donnés par l'énoncé. Il faut ensuite résoudre une équation algébrique, ce qui n'est pas simple car cela représente un changement de cadre pour l'élève, changement amorcé tout de même par l'énoncé, qui pose déjà l'inconnue x.

exercice 2 :
ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 et AC = 5
Le triangle A'B'C' est un triangle rectangle en B' tel que A'C' = 5/3 et A'B' = 1
Démontrer que ces deux triangles sont semblables

Pour ce deuxième exercice, il y a plusieurs possibilités. On peut résoudre en appliquant la propriété P3, avec l'adaptation préalable d'un calcul d'intermédiaire – calcul du troisième côté à l'aide de Pythagore. Une autre possibilité serait de calculer un deuxième angle par trigonométrie, et de prouver ensuite la similitude par la propriété D'1. Enfin, on peut aussi envisager de résoudre cet exercice en appliquant P'1, après avoir calculé le troisième côté – toujours à l'aide de Pythagore – et écrit la proportionnalité des cotés.

Dans tous les cas, il s'agit d'une adaptation qui nécessite un calcul intermédiaire et faisant intervenir une connaissance ancienne avant l'application de la propriété nouvelle.

Le repérage des homologues est facilité ici par le choix des lettres des sommets (A et A', B et B', C et C' sont évidemment homologues). On peut se demander si les élèves vont se poser la question et vérifier avec les données numériques que ces sommets correspondent bien.

exercice 3 :

On considère un cercle (C) et MNP un triangle inscrit dans ce cercle

La bissectrice de l'angle NMP coupe [NP] en D et (C) en E

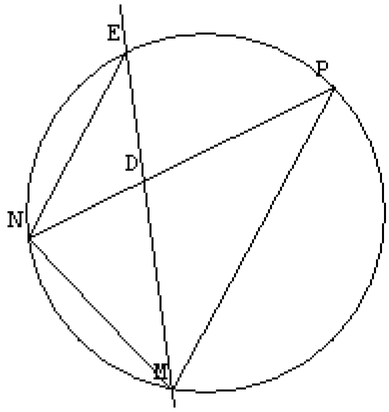
1) démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables

2) En déduire que $EN^2 = EM \times ED$

3) démontrer que le triangle EDP et le triangle EMP sont semblables. En déduire EP^2

4) Que peut-on en conclure ?

(la figure est donnée)



Dans cet exercice, il faut appliquer deux fois la même méthode, pour démontrer une similitude et en déduire les expressions demandées. La deuxième fois, cette méthode fait l'objet d'une seule question et non plus deux, mais reste tout de même assez détaillée.

En utilisant le théorème de l'angle inscrit et l'égalité des angles définis par la bissectrice, on introduit une étape pour montrer une égalité de deux angles à un même troisième, puis on utilise D'1. Ensuite, on applique P1 sans adaptation nécessaire, et on transforme l'expression en effectuant les produits en croix. On réitère la méthode pour la question 3).

Le repérage des homologues n'est ici pas pris en charge par l'énoncé, et les triangles sont emboîtés ; on peut donc prévoir ici une difficulté pour les élèves, d'autant plus que les noms des triangles sont dans le désordre.

La dernière question permet de déduire facilement, au vu des résultats précédents, l'égalité des longueurs EN et EP.

exercice 4 :

ABCD est un carré de côté a, I et J sont les milieux respectifs de[CD] et [DA], les droites (BJ) et (AI) sont sécantes en M

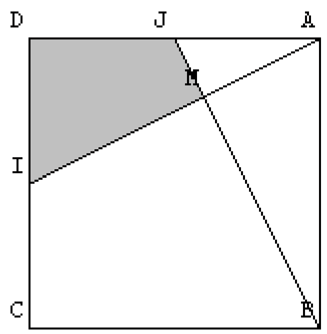
1) démontrer que les triangles ADI et BAJ sont isométriques

2) démontrer que les triangles AMJ et ADI sont semblables

3) Démontrer que AJ/AI = 1/√5. Puis en déduire le rapport aire AMJ / aire ADI

4) En déduire quelle fraction de l'aire du carré représente l'aire de la surface hachurée

(la figure est donnée)



Dans ce quatrième et dernier exercice, on a à la fois des triangles isométriques et des triangles semblables. Les triangles isométriques ayant été vus juste auparavant, mais avant l'interruption des vacances scolaires, on peut s'attendre à ce que les élèves ne l'aient pas révisé. Nous verrons si cela leur pose effectivement un problème. On démontre l'isométrie à l'aide de deux côtés et d'un angle égaux, les homologues étant donnés dans l'ordre dans l'énoncé. On démontre ensuite la similitude à l'aide du résultat de la question précédente, qui permet d'obtenir l'égalité de deux angles et d'appliquer D'1. Les homologues sont encore une fois dans l'ordre. On calcule ensuite le rapport de longueur demandé à l'aide du théorème de Pythagore ; ce qui peut s'avérer troublant, car cette question ressemble fort à une application de P1, "classique" à ce stade de l'exercice. Cela permet de calculer le rapport de similitude (application de P1) puis d'en déduire le rapport des aires (application de P2), et le calcul de l'aire demandée (qui demande un travail algébrique non simple).

Voici un tableau reprenant les notations précédentes et rendant compte de l'ensemble des tâches des quatre exercices du contrôle :

ex	Conf	Connaissances qui fonctionnent		Niveau de mise en fonctionnement
		Anciennes	**Nouvelles**	
1	2 Δ	Algèbre x	P1	reconnaissance des modalités d'application
2	2 Δ rect	Pythagore	P'1	calcul d'intermédiaires (calcul du 3ème côté)
		trigo	D'1	calcul d'intermédiaires (calcul d'un 2ème angle)
		Pythagore	P3	calcul d'intermédiaires (calcul du 3ème côté)
3 1)	cercle Δ emboîtés	angle inscrit, triangles particuliers	D'1	introduction d'étapes (égalité à un même 3ème angle)
2)		Algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application
3)		angle inscrit triangles particuliers	D'1	introduction d'étapes (égalité à un même 3ème angle)
		Algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application
4 1)	carré Δ emboîtés	Isométrie		
2)			D'1	utilisation des questions précédentes
3)		Pythagore	P2	reconnaissance des modalités d'application
4)		Algèbre		

Grâce à ce tableau, nous pouvons tout de suite analyser les énoncés du contrôle, et commencer à les comparer à ceux qui ont été donné en classe auparavant.

b) Première comparaison du contrôle avec ce qui a été fait en classe

Nous remarquons tout d'abord que toutes les propriétés nouvelles y sont testées, l'évaluation porte donc ici sur tout ce qui a été fait de nouveau, ce qui est intéressant pour nous[56], dans la mesure où cela nous permet d'évaluer les apprentissages sur un plus grand éventail de connaissances des élèves.

De plus, certaines propriétés anciennes associées dans ces exercices n'ont pas été revues en classe dans ce chapitre, ce qui rajoute une difficulté supplémentaire pour les élèves. Sauront-ils mobiliser dans ces exercices de contrôle ces notions, en plus de celles qui sont ici en cours d'apprentissage, sans révision préalable ?

Pour le chercheur, cela pourrait représenter un obstacle : nous ne pouvons pas savoir lorsqu'un élève a été mis en difficulté pendant l'épreuve, si c'est par les notions nouvelles, qui nous

[56] et plus compliqué pour les élèves !

intéressent, ou par les autres, plus anciennes, et sur lesquelles nous n'avons pas d'informations en ce qui concerne les enseignements passés, pour chaque élève. C'est pourquoi – comme nous l'avons déjà signalé dans notre méthodologie – il est intéressant pour nous de regarder si l'application de la notion ancienne intervient avant ou après la notion de triangles semblables : nous comptabilisons des réponses incomplètes, mais qui présentent une application correcte des notions nouvelles, et qui nous renseignent donc tout de même sur les apprentissages nouveaux.

Si nous regardons maintenant le niveau de mise en fonctionnement des notions nouvelles dans les exercices du contrôle, nous constatons qu'il est plutôt plus élevé que ceux des exercices faits en classe. Ceci est évidemment d'autant plus intéressant pour nos analyses : cela nous permet de regarder si les élèves arrivent à surmonter un plus grand niveau de difficulté, et si oui, à l'aide de quel type de travail en classe ou préalable.

Enfin, si l'on regarde comment les noms des triangles sont écrits dans l'énoncé du contrôle, on remarque qu'ils ne sont donnés dans le désordre que dans l'exercice 3. Nous verrons plus loin si cela a posé un problème aux élèves, étant donné qu'en classe les homologues ont été souvent donnés dans le bon ordre.

Nous analyserons plus en détail dans les pages suivantes chacun des exercices du contrôle, mis en parallèle avec des exercices similaires faits en classe, pour comprendre ce qui a pu influencer les apprentissages éventuels.

7) Les résultats des élèves au contrôle

a) La relation entre apprentissage et réussite au contrôle

Pour savoir s'il y a eu ou non apprentissage des notions visées chez les élèves, nous rappelons que nous avons choisi de regarder leurs résultats à un contrôle sur ces notions. Cette mise en relation est rendue possible par le fait que la notion de triangles semblables n'a jamais été vue dans les classes précédentes, et que, par conséquent, toutes les rencontres des élèves avec cette notion se sont faites lors des séances que nous avons filmées.

Du côté du contrôle – comme nous l'avons déjà précisé dans notre méthodologie – un échec ne signifie pas forcément qu'il n'y a pas eu apprentissage. D'autre part, dans notre parallèle entre ce qui est demandé lors du contrôle et tout ce qui a été fait en classe, nous supposons que l'élève s'approprie tout ce que dit le professeur, de la même façon que nous en avons tenu compte à partir des vidéos.

De plus, nous ne pouvons ignorer que certains élèves auront travaillé ces notions ailleurs que dans cette classe : les redoublants par exemple, les auront vues l'année précédente ; ou encore ceux qui prennent des cours particuliers, les auront vues en dehors du lycée. Pour ceux-là, la réussite au contrôle ne dépendra pas uniquement de ce qu'aura fait Mme B.. Nous avons essayé de rassembler des informations sur les élèves qui recevaient une aide extérieure, mais cela s'est avéré compliqué. D'une part, les élèves qui se font aider n'osent pas toujours l'avouer au professeur, de peur, par exemple, que leurs devoirs à la maison ne soient pas notés avec la même générosité. D'autre part, les élèves qui n'ont pas de professeur particulier peuvent tout de même bénéficier de l'aide d'un membre de leur famille.

Nous sommes donc conscients de nos limites à suivre l'élève dans et hors de sa classe, et c'est pourquoi nous essayons de rester prudents dans nos interprétations et conclusions, et ne prétendons pas déduire avec précision ce qui a été appris par les élèves, ni ce qui dans le cours, a favorisé cet apprentissage. En revanche, nous pensons dégager des pistes intéressantes sur les relations entre enseignement et apprentissage.

b) Le classement en "bons" ou "mauvais" élèves

Nous avons donné une "note" aux élèves à l'issue de ce contrôle, en fonction de leur réussite aux applications demandées. Cette note tient compte uniquement du nombre de fois où ils ont appliqué correctement les notions mises en jeu dans les exercices du contrôle. Nous comptabilisons en effet parmi les bonnes réponses, les réponses des élèves où l'utilisation des notions nouvelles a été correctement réalisée, même si le résultat final n'est pas juste. Cette note nous a permis de classer nos élèves en deux groupes : les "bons", ceux qui ont eu 3, 4 ou 5 points sur 5, et les mauvais, ceux qui ont totalisé 2 points sur 5 au maximum. Les "bons élèves" sont ceux qui ont réussi le contrôle. Mais ont-ils réussi le contrôle parce qu'ils étaient bons ou sont-ils bons parce qu'ils ont réussi le contrôle ?

Ce classement pose évidemment problème, puisqu'il repose sur cet unique contrôle. Nous l'avons donc complété à l'aide des informations que nous ont fournies les professeurs : des appréciations sur les élèves, leurs moyennes de l'année, ou leur orientation pour la classe de 1ère, qui sont venues confirmer notre notation

élèves	notes	orientation 1ère
diana	2	S
mihoi	3	STT
christine	2	S/ES
carole	5	S
alexandre	1	S
mathilde (cours particuliers)	4	S
massis	4	S
sébastien	2	S
tiphaine	1	L
eloïse	2	S
fateh	2	S/ES
cyril	3	S
matthieu	3	S
johan	4	S
benjamin	4	S
audrey (cours particuliers)[57]	0	ES
julien	5	S
clémentine	1	S
coralie	4	S
kristina	0	ES
roxane (cours particuliers)	2	L
nur	4	STT
lorie	3	S
pauline	2	ES
claire	1	L
déborah N	2	S
alice	4	ES
anne-lise	3	S
déborah L	2	L
aline	0	Redoublement
laura	3	Redoublement
clémence	4	S
élodie	1	Redoublement

Nous avons laissé en blanc dans ce tableau les lignes qui correspondaient aux mauvais résultats dans notre notation, confirmés par un redoublement ou à un passage de l'élève en 1ère L ou STT. Nous avons mis en gris clair les lignes correspondant aux bons résultats des élèves (3, 4 ou 5 sur 5) confirmés par un passage en S ou en ES. Nous avons mis en gris plus foncé les lignes du tableau correspondant à des passages en S ou ES qui ne concordaient pas avec la mauvaise note de l'élève (1 ou 2 sur 5). Il y a donc 4 de nos résultats qui ne semblent pas refléter l'orientation des

57 Nous avons précisé les élèves qui ont admis qu'ils prenaient des cours particuliers, mais ce ne sont peut-être pas les seuls

élèves (en admettant que la note de 2 sur 5 soit tangente, et difficile à interpréter en termes de bon ou mauvais élèves).

Les résultats des élèves ne semblent pas incohérents, pour la majorité, avec l'orientation qui leur a été proposée peu après. Ce classement reste tout de même à prendre avec précaution, et nous essaierons de rappeler, lorsque nous l'utilisons, quelles sont ses limites.

c) Les résultats

Nous avons dressé un tableau dans lequel nous avons détaillé les résultats des élèves à chaque tâche proposée dans le contrôle. Nous reprenons les codages utilisés précédemment pour l'analyse des tâches.

Nous avons choisi de mettre des couleurs dans le tableau des résultats des élèves : nous avons utilisé des cases plus foncées pour les bonnes réponses, puis de plus en plus claires, jusqu'aux cases blanches pour les questions non abordées. Nous avons voulu ainsi mettre en évidence les exercices qui ont été les mieux réussis, et faire éventuellement apparaître des relations entre les résultats des élèves aux différents exercices.

exercices	Ex 1	Ex 2	Ex 3		Ex 4		notes
méthodes	**P1**	**P'1** **D'1** **P3**	**D'1**	**P1**	**D'1**	**P2**	
niveau	reconnaître les modalités	calculer des intermédiaires	introduire des étapes	reconnaître les modalités	utiliser les questions	reconnaître les modalités	
connaissances anciennes	Algèbre	Pythagore ou trigo	angle inscrit, triangles particuliers	Algèbre	Isométrie	Pythagore	
diana	(b)	f (P3)	f	b	x	x	2
mihoi	b	f	f	b	(b)	x	3
christine	x	b (D'1)	f	b	x	x	2
carole	b	b (P'1)	b	b	b	x	5
alexandre	(b)	f (P3)	x	x	x	x	1
mathilde	b	b (P'1)	f	(b)	b	x	4
massis	b	f (P3)	b	b	f	b	4
sébastien	x	(b) (P'1)	f	(b)	x	x	2
tiphaine	x	b (P3)	x	x	f	x	1
eloïse	(b)	f (P3)	f	b	x	x	2
fateh	b	f (P3)	x	b	f	x	2
cyril	(b)	x	b	b	x	x	3
matthieu	b	f (P3)	f	b	f	b	3
johan	b	b (D'1)	b	b	x	x	4
benjamin	(b)	(b) (P3)	b	b	x	x	4
audrey	x	f (P'1)	f	x	f	x	0
julien	x	b (D'1)	b	b	b	b	5
clémentine	b	f (P'1)	f	f	f	x	1
coralie	(b)	b (P3)	b	b	f	x	4
kristina	x	f (P'1)	f	x	f	x	0
roxane	x	f (D'1)	f	(b)	(b)	x	2
nur	x	b (P'1)	b	b	(b)	x	4
lorie	b	b (P'1)	x	b	x	x	3
pauline	(b)	b (P'1)	x	x	f	x	2
claire	b	f (P3)	x	x	x	x	1
déborah N	x	b (P'1)	f	(b)	x	x	2
alice	(b)	(b) (P3)	(b)	b	x	x	4
anne-lise	(b)	b (P'1)	x	b	x	x	3
déborah L	b	f	x	x	b	x	2
aline	f	f	f	x	x	x	0
laura	(b)	x	f	(b)	b	x	3
clémence	b	b (P'1)	b	b	x	x	4
élodie	f	(b) (P'1)	f	f	f	x	1
total : 33	**12 (22)**	**13 (17)**	**9 (10)**	**18 (23)**	**5 (8)**	**3**	

Légende : *b : réponse juste, f : réponse fausse, x : question non traitée*
(.) : l'élève a reconnu la propriété à appliquer, mais s'est trompé en l'appliquant

8) Une première analyse des procédures des élèves et de leurs erreurs, en fonction de la connaissance nouvelle à appliquer dans le contrôle.

Nous allons chercher, pour chaque exercice du contrôle, le ou les exercices effectués en classe, s'il y en a, dont les variables se rapprochent le plus de celles du contrôle. Puis, en regardant les résultats des élèves, nous verrons mieux, lorsque la comparaison peut se faire, s'il existe une variable décisive pour la réussite de chacune des tâches.

exercice 1 :
ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables, les sommets A', B' et C' étant homologues respectivement de A, B et C.
Sachant que AB = 5, AC = 3 et BC = 7, déterminer x pour que A'B' = 7 + x et A'C' = x –2

Dans cet exercice, il s'agit de d'utiliser la similitude de deux triangles pour exprimer un rapport entre leurs côtés, il faut donc reconnaître et appliquer directement la propriété P1 : "si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont proportionnels". On obtient alors l'équation suivante : (7+x) / 5 = (x+2) / 3. Il suffit ensuite d'effectuer les produits en croix et de résoudre algébriquement l'équation.

	configuration	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**connaissances anciennes associées**	**type de travail des élèves**	**types d'aides**
ex 1 du contrôle	2 triangles	P1	reconnaissance des modalités mélange de registres	algèbre avec x		
ex 7 fait en classe	2 triangles	P1	reconnaissance des modalités	algèbre sans x	pas de temps de recherche	méthode pendant tout l'exercice questions de + en + fermées

L'exercice 7 préparait donc les élèves au premier exercice du contrôle, sans temps de recherche laissé aux élèves cependant, et sans qu'ils aient l'initiative de structurer la méthode. L'usage de l'algèbre ne devrait pas compliquer l'application de P1, puisqu'il intervient seulement après, en fin d'exercice.

	bons élèves	mauvais élèves	total
non abordé / abordé	2 / 14	7 / 10	9 / 24
application correcte de P1	10	2	12
application fausse de P1	4	6	10

Cet exercice n'a pas été réussi par beaucoup d'élèves, si les 2/3 de la classe ont reconnu la propriété P1, elle a été appliquée correctement par moins d'1/3 de la classe. L'algèbre a posé problème pour 6 élèves, et ne leur a pas permis de finir l'exercice. Voici les erreurs des élèves :

erreurs des élèves	**nombre d'élèves**
étourderies dans l'énoncé ou les calculs	**2**
n'arrive pas à remplacer les longueurs par leur expression algébrique	**4**
n'arrive pas à résoudre l'équation des rapports	**4**
ne reconnaît pas P1	**2**

Dans ce premier exercice, beaucoup d'élèves ont reconnu la propriété à appliquer (22 sur 24 ayant visiblement abordé l'exercice), mais seuls 12 d'entre eux ont résolu le problème, les autres ont fait des erreurs d'algèbre, ou encore se sont arrêtés après avoir trouvé l'égalité des rapports. Les 9 élèves qui n'ont pas abordé cet exercice et sont passés directement aux suivants ont peut-être été déstabilisés par le mélange de l'algèbre et de la géométrie dans l'énoncé.

Il est possible ici que, dans des conditions où pourtant la configuration, les connaissances anciennes et le niveau de mise en fonctionnement sont identiques, l'absence de temps de recherche ou d'initiatives en classe ait été un frein à la réussite ultérieure des élèves.

exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 et AC = 5

Le triangle A'B'C' est un triangle rectangle en B' tel que A'C' = 5/3 et A'B' = 1

Démontrer que ces deux triangles sont semblables

Pour résoudre cet exercice, il y a plusieurs méthodes. Il faut démontrer que deux triangles dont on connaît un angle et deux longueurs sont semblables. On ne peut utiliser directement aucune des caractérisations de similitude de deux triangles, car les deux côtés qui sont donnés ne sont pas ceux qui bordent l'angle connu. Il faut donc d'abord, au choix, calculer les longueurs de la troisième paire de côtés homologues à l'aide du théorème de Pythagore, puis caractériser la similitude à l'aide de la propriété P3 (1 angle commun bordé de deux paires de côtés proportionnels), ou encore avec la propriété P'1 (3 côtés proportionnels), ou bien calculer un deuxième angle dans chaque triangle par trigonométrie, et conclure à l'aide de la 2ème définition (2 angles égaux).

Il nous faut prendre en compte ici chacune des trois méthodes utilisées par les élèves :

- application de la propriété P'1

	configuration	**connaissances anciennes**	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**type de travail**	**type d'aides**
ex2 du contrôle	2 triangles rectangles	Pythagore	P'1	calcul d'intermédiaires		
ex14 devoir maison	2 triangles rectangles	Pythagore	P'1	reconnaissance des modalités d'application	à la maison puis corrigé détaillé	

Il n'y avait pas dans les séances en classe d'exercices reprenant exactement les mêmes variables que celles du contrôle ; en effet, la propriété P'1 n'a pas été vue en classe. Cependant les élèves ont travaillé le niveau de mise en fonctionnement consistant à introduire des intermédiaires, à travers les propriétés P1 et D'1. C'est en devoir à la maison que l'exercice a été le mieux préparé, avec la même configuration et la même connaissance ancienne associée, bien que le niveau de mise en fonctionnement y soit alors plus simple.

Sur les 13 élèves ayant choisi cette méthode, 10 l'ont appliquée correctement :

	bons élèves	mauvais élèves	total
application correcte	6	4	10
application fausse	0	3	3

Les bons élèves qui ont choisi cette méthode ont tous réussi à l'appliquer, ce n'est pas le cas des plus mauvais, pour qui la difficulté du niveau de mise en fonctionnement, pourtant travaillée en classe dans d'autres applications, n'est pas transférable ici à P'1.

- application de la propriété D'1 :

	configuration	**connaissances anciennes**	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**type de travail**	**type d'aides**
ex2 du contrôle	2 triangles rectangles	trigo	D'1	calcul d'intermédiaires		
ex2 en classe	2 triangles rectangles	somme des angles	D'1	calcul d'intermédiaires	2 min 40 de recherche au début	méthode question fermée après recherche
ex4 en classe	2 triangles	triangles particuliers	D'1	reconnaissance des modalités	1 min recherche après la mise en route	méthode questions fermées pendant tout l'ex
ex 5 en classe	cercle	angle inscrit	D'1	reconnaissance des modalités	6min50 recherche au début	méthode questions de + en + fermées au début
ex 6 en classe	parallélogramme	Thalès, angles	D'1	reconnaissance des modalités	2min05 recherche à la fin	outil et méthode questions de + en + fermées au début
ex8 en classe	Thalès	Thalès	D'1	reconnaissance des modalités	1 min recherche	méthode questions de + en + fermées pendant tout l'exercice
ex13 devoir maison	2 triangles		D'1	reconnaissance des modalités	corrigé détaillé	

Il n'y a pas eu d'exercice fait en classe qui reprenne exactement les variables de l'exercice du contrôle, cependant, la propriété D'1 a été vue à travers de nombreux exercices, en particulier l'exercice 2 avec la nécessité d'introduire des intermédiaires. Cette propriété a été abordée dans de nombreuses configurations, et associée à diverses connaissances anciennes, mais jamais à la trigonométrie. Le travail des élèves a été presque toujours facilité en classe par les aides du professeur, par le biais de questions fermées, donc assez directives.

Les résultats des 4 élèves ayant utilisé cette méthode se répartissent ainsi :

	bons élèves	mauvais élèves	total
application correcte	2	1	3
application fausse	0	1	1

Cette méthode, a été peu utilisée, peut-être parce qu'elle faisait appel à une connaissance ancienne qui n'avait pas fait l'objet d'une révision au cours de ce chapitre.

- application de la propriété P3 :

	configuration	**connaissances anciennes**	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**type de travail**	**types d'aides**
ex2 du contrôle	2 triangles rectangles	Pythagore	P3	calcul d'intermédiaires		
ex14 devoir maison	2 triangles rectangles	Pythagore	P3	reconnaissance des modalités d'application	à la maison puis distribution d'un corrigé détaillé	
ex12 module 2	cercle	angle inscrit	P3	introduction d'étapes	demi-classe n'a peut-être pas été abordé	individuelles

La propriété P3 n'a été travaillée en classe qu'en module. Elle a aussi été vue en devoir à la maison, avec la révision du théorème de Pythagore, pour lequel un corrigé détaillé a été distribué.

Les résultats des 11 élèves ayant choisi cette méthode sont les suivants :

	bons élèves	mauvais élèves	total
application correcte	3	1	4
application fausse	2	5	7

Pour résumer, les résultats des élèves à l'exercice 2 du contrôle en fonction de la méthode qu'ils ont utilisée sont les suivants :

	élèves qui ont réussi (bons / mauvais)	**élèves qui se sont trompés (bons / mauvais)**	**total (bons / mauvais)**
élèves qui ont utilisé P'1	10 (6 / 4)	3 (0 / 3)	13 (6 / 7)
élèves qui ont utilisé D'1	3 (2 / 1)	1 (0 / 1)	4 (2 / 2)
élèves qui ont utilisé P3	4 (3 / 1)	7 (2 / 5)	11 (5 / 6)
total sur 31 élèves ayant abordé l'exercice	**17** élèves ont réussi l'exercice (11 / 6)	**14** élèves qui se sont trompés (2 / 9)	**28** élèves ont reconnu une des propriétés (13 / 15)

Voici un tableau donnant les erreurs de ceux qui se sont trompés à cette question :

erreurs des élèves	**nombre d"élèves (bons / mauvais)**
mauvaise hypothèse dans P3 (angle commun pas entre les deux côtés proportionnels)	7
mauvaise hypothèse dans P'1 (égalité de deux rapports au lieu de trois)	2
absence de méthode	2
erreur de calcul liée aux fractions ou aux racines, étourderie	3

Bien que n'ayant pas été vue en classe entière, mais seulement en module et dans le devoir à la maison, la propriété P3 a été utilisée par 11 élèves sur les 31 qui ont abordé l'exercice, mais en l'appliquant avec des hypothèses fausses (ils n'ont pas respecté le fait que les côtés proportionnels doivent être de part et d'autre de l'angle commun, et ce n'était justement pas le cas dans les hypothèses données). Pour ces élèves tout se passe comme si la fin justifiait les moyens ! Il est probable qu'il y a ici un effet de contrat : c'est peut-être parce que l'énoncé donnait les valeurs de deux côtés et d'un angle, que les élèves ont été si nombreux à privilégier cette méthode. Mais ont-ils ici les moyens de comprendre en quoi leur réponse est fausse ?

Les élèves qui ont réussi cet exercice ont utilisé pour la plupart la propriété P'1 (10 sur les 17 qui ont réussi), vue uniquement elle aussi en devoir à la maison.

exercice 3 : (la figure est donnée)

On considère un cercle (C) et MNP un triangle inscrit dans ce cercle

La bissectrice de l'angle NMP coupe [NP] en D et (C) en E

1) Démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables

2) En déduire que $EN^2 = EM \times ED$

3) Démontrer que le triangle EDP et le triangle EMP sont semblables. En déduire EP^2

4) Que peut-on en conclure ?

Dans cet exercice, il s'agit de démontrer la similitude de deux triangles à l'aide de deux de leurs angles. L'un de ces angles est commun aux deux triangles, pour l'autre paire d'angles, il faut démontrer l'égalité à un même troisième, à l'aide de la bissectrice d'une part, et du théorème de l'angle inscrit d'autre part. Lorsqu'on a démontré la similitude à l'aide de la 2ème définition, on utilise la propriété P'1 et un produit en croix pour trouver l'expression demandée. dans la 3ème question, il faut répéter l'opération sur deux autres triangles, puis en déduire une égalité de longueurs dans la dernière question. Nous avons exposé ici les tâches des deux premières questions car les questions suivantes reprenaient la même méthode.

- 1ère question

	configuration	connaissances anciennes	nouvelle	NMF	type de travail	types d'aides
ex3 du contrôle	cercle triangles emboîtés	angle inscrit	D'1	introduction étapes reconnaissance des sommets homologues		
ex4 en classe	2 triangles	triangles particuliers	D'1	reconnaissance des modalités	1 min de recherche après la mise en route	méthode questions fermées pendant tout l'ex
ex5 en classe	cercle	angle inscrit	D'1	reconnaissance modalités	6min50 recherche au début	méthode questions de + en + fermées au début
ex6 questions 1) et 2)	//gramme	égalité d'angles, Thalès	D'1	reconnaissance des modalités	2min 05 après balisage de la méthode	outil et méthode questions de + en + fermées au début
ex 7 question 1)	2 triangles	égalités d'angles	D'1	reconnaissance des modalités	pas de temps de recherche	méthode questions de + en + fermées, rappel ancien-nouveau pendant tout l'exercice
ex 8	Thalès	Thalès, égalité d'angles	D'1	reconnaissance des modalités	1 min après avoir balisé la méthode	registre et méthode questions de + en + fermées pendant tout l'ex
ex9 en module	cercle	angle inscrit	D'1	reconnaissance modalités	46 min de recherche demi-groupe	aides individuelles
ex11 en module	cercle triangles emboîtés	Δ rect et cercle, angle inscrit	D'1	introduction d'étapes reconnaissance des sommets homologues	2ème module non filmé	aides individuelles
ex13 à la maison	2 triangles	Thalès	D'1	reconnaissance des modalités	devoir à la maison distribution d'un corrigé détaillé	

La propriété D'1 a été travaillée en classe dans la même configuration et associée à la même connaissance ancienne à travers un exercice en particulier, lors du deuxième module, qui n'a malheureusement pas été filmé. Le professeur nous affirme cependant que le déroulement de celui-ci et comparable à celui du premier, que nous avons en revanche filmé.

Les résultats obtenus par les élèves à la première question de cet exercice sont les suivants :

	bons élèves	mauvais élèves	total
non abordé / abordé	2 / 14	6 / 11	8 / 25
application correcte	10	0	10
application fausse	3	12	15

Il semblerait donc que malgré une configuration et une connaissance ancienne identique, ainsi qu'un temps de recherche important, seuls les bons élèves aient réussi à surmonter la difficulté du niveau de mise en fonctionnement de l'application, qui n'avait jamais été travaillé en classe.

- 2ème question

	configuration	**connaissances anciennes**	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**type de travail**	**types d'aides**
ex3 du contrôle	cercle 2 triangles emboîtés	algèbre "sans x"	P1	reconnaissance des modalités		
ex7 en classe	2 triangles	algèbre "sans x"	P1	reconnaissance des modalités	0 min recherche	méthode questions fermées, rappel ancien-nouveau pendant tout l'exercice
ex9 en module	cercle	algèbre "sans x"	P1	calcul d'intermédiaires	46 min de recherche demi-groupe	aides individuelles
ex11 en module	cercle 2 triangles emboîtés	algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application	séance de module non filmée	aides individuelles

Cette question a été préparée en particulier par des exercices faits en module ; l'exercice 9, avec une configuration plus simple et une même connaissance ancienne associée, et avec un niveau de mise en fonctionnement plus difficile, et l'exercice 11, avec la même configuration mais un niveau de mise en fonctionnement plus simple.

Les résultats obtenus par les élèves sont les suivants :

	bons élèves	mauvais élèves	total
non abordé / abordé	0 / 16	8 / 9	8 / 25
application correcte	16	7	23
application fausse	0	2	2

A deux exceptions près, les élèves ayant abordé cet exercice l'ont tous réussi, y compris les plus mauvais. Une fois encore, le fait d'avoir, en classe, effectué un exercice dont les variables étaient sensiblement les mêmes, semble avoir favorisé la réussite des élèves.

La reconnaissance des sommets homologues était ici nécessaire pour résoudre l'exercice. Voilà un tableau montrant comment les élèves ont pris en compte les sommets homologues dans la rédaction de ces deux questions :

le modèle et son utilisation	**nombre d'élèves**
écriture "en dessous" / sommets dans l'ordre	9
écriture "en dessous" / sommets dans le désordre	6
pas écriture "en dessous" / sommets dans l'ordre	3
pas écriture en dessous / sommets dans le désordre	9

Les élèves sont nombreux à avoir adopté l'écriture des sommets homologues les uns en dessous des autres, mais 6 élèves sur ces 15 n'ont pas pour autant associé les sommets homologues correctement. Il est donc possible que certains élèves aient "triché", c'est à dire trouvé les sommets homologues au hasard grâce à la formule à démontrer, et non l'inverse !

exercice 4 : (la figure est donnée)

ABCD est un carré de côté a, I et J sont les milieux respectifs de[CD] et [DA], les droites (BJ) et (AI) sont sécantes en M

1) démontrer que les triangles ADI et BAJ sont isométriques

2) démontrer que les triangles AMJ et ADI sont semblables

3) Démontrer que AJ/AI = 1/√5. Puis en déduire le rapport aire AMJ / aire ADI

4) En déduire quelle fraction de l'aide du carré représente l'aire de la surface hachurée

- 1ère question

	configuration	**connaissances anciennes**	**connaissance nouvelle**	**NMF**	**type de travail**	**types d'aides**
ex4 du contrôle	2 triangles emboîtés	isométrie	D'1	utilisation des questions précédentes		
ex4 en classe	2 triangles	triangles particuliers	D'1	reconnaissance des modalités d'application	1 min de recherche après la mise en route	méthode questions fermées pendant tout l'ex
ex7 1) en classe	2 triangles	égalités d'angles	D'1	reconnaissance des modalités d'application	pas de temps de recherche	méthode questions de + en + fermées, rappel ancien-nouveau pendant tout l'exercice
ex4 2) à la maison	carré		D'1	utilisation des questions précédentes	devoir maison	
ex9 1) en module	cercle	angle inscrit	D'1	reconnaissance des modalités d'application	46 min, recherche individuelle	aides individuelles
ex11 en module	cercle triangles emboîtés	Δ rect et cercle, angle inscrit	D'1	introduction d'étapes reconnaissance des sommets homologues	2ème module non filmé	aides individuelles

Les résultats des élèves à cette question sont les suivants :

	bons élèves	mauvais élèves	total
non abordé / abordé	7 / 9	8 / 9	15 / 18
application correcte	6	2	8
application fausse	3	7	10

La configuration ici utilisée est nouvelle et le mélange avec le chapitre précédent, les triangles isométriques, n'a pas été réalisé dans les exercices ; c'est peut-être pourquoi les résultats des élèves à cette question sont faibles.

- 2ème question

	configuration	connaissances anciennes	connaissance nouvelle	NMF	type de travail	types d'aides
ex4	2 triangles non distincts	Pythagore	P2	reconnaissance des modalités		

Il n'y a pas de tâche équivalente traitée en classe : la propriété P2 n'a fait l'objet d'aucun exercice en classe, ce qui explique ici aussi les mauvais résultats des élèves :

	bons élèves	mauvais élèves	total
non abordé / abordé	13 / 3	17 / 0	30
application correcte	3	0	3
application fausse	0	0	0

Finalement, les résultats des élèves à ce dernier exercice sont les suivants :

élèves qui ont abordé la 1ère question	élèves qui ont réussi la 1ère question	élèves qui ont abordé la 2ème question	élèves qui ont réussi la 2ème question	élèves qui ont abordé les deux questions	élèves qui ont réussi entièrement l'exercice 4
18	8	3	3	3	1

Il est très probable que le dernier exercice a été raté faute de temps ; mais il faut tout de même noter que les élèves ont largement résolu les exercices dans le désordre sur leur copie, la position de ce dernier exercice n'est donc pas uniquement à mettre en cause. Les élèves ont été peu nombreux à avoir abordé la dernière question, qui par ailleurs ne ressemblait pas à ce qui avait été fait en classe : la complexité de l'adaptation était ici assez élevée. De plus, même si les trois cas d'isométrie avaient été rappelés au début du cours sur les triangles semblables, aucun vrai mélange n'a été proposé entre ces deux chapitres successifs dans les exercices proposés en classe.

9) Conclusion

a) Bilan de la comparaison des tâches données en classe et en contrôle

ex	configuration	comparaison des connaissances anciennes intervenant		même connaissance nouvelle	NMF en classe par rapport à celui de contrôle	type de travail en classe	types d'aides	résultats des élèves		
								reconnaissance de la propriété à appliquer	application correcte	
		avant	après					TOTAL / abordé	TOTAL / appliqué	bons élèves / mauvais
1	la même		différente	P1	identique	pas de temps de recherche	méthode pendant tout l'exercice questions de + en + fermées	22 / 24	12 / 22	8 / 4
2	la même	la même		P'1 (au choix)	plus facile	devoir maison corrigé détaillé commenté en classe		11 / 13	10 / 11	6 / 4
	la même	la même		D'1 (au choix)	identique	peu de temps recherche dans cette configuration	méthode question fermée après recherche	3 / 4	3 / 3	2 / 1
	la même	la même		P3 (au choix)	plus facile	devoir maison corrigé détaillé commenté en classe		4 / 11	4 / 4	3 / 1
3 1)	la même	la même		D'1	identique	tps recherche long (+ ex avec conf ≠ mais NMF plus facile)	individu-elles	10 / 25	10 / 10	10 / 0
3 2)	la même		la même	P1	plus difficile	temps de recherche long	individu-elles	23 / 25	23 / 23	16 / 7
4 1)	différente	différente		D'1	plus facile	2 exercices temps recherche long	individu-elles	8 / 18	8 / 8	6 / 2
4 2)	pas d'ex équivalent en classe			P2		aucun		3 / 3	3 / 3	3 / 0

b) Interprétation des résultats : analyse exercice par exercice

L'exercice 1 étant donné avec la même connaissance nouvelle, le même niveau de fonctionnement et la même configuration qu'en classe (dans l'exercice 7), les élèves reconnaissent alors assez bien la propriété à appliquer (2/3 de la classe), mais ils sont peu nombreux à l'appliquer correctement. Nous ne pouvons pas affirmer que c'est le type de travail en classe qui les a empêchés de terminer l'exercice, car l'association à une connaissance ancienne différente et non révisée intervenant après l'application est probablement responsable de leur échec en fin d'exercice.

Dans l'exercice 2, nous retrouvons la propriété P1 qui a été abordée en classe dans au moins 7 exercices, et plus particulièrement dans l'exercice 2, sans travail autonome des élèves et avec une autre connaissance ancienne, mais dans la même configuration et le même niveau de fonctionnement. Dans ce cas pourtant, peu d'élèves ont choisi d'utiliser cette méthode, et parmi eux, uniquement les bons élèves. Ici encore, nous ne pouvons déterminer ce qui, de la connaissance ancienne différente ou du faible temps de recherche laissé en classe, a détourné de cette voie les élèves, pourtant relativement bien entraînés à utiliser cette propriété qui a été proposée 8 fois sur les 15 tâches données en classe.

Dans l'exercice 2 toujours, les deux autres méthodes possibles pour la résolution utilisaient des propriétés avaient été beaucoup moins travaillées en classe, bien qu'avec la même configuration, la même connaissance ancienne, mais un niveau de mise en fonctionnement plus simple dans les deux cas. Les résultats des élèves sont pourtant différents pour ces deux méthodes, en effet, pour la propriété P'1, le taux de réussite est assez bon (10 élèves sur 13) tandis qu'il est plus faible pour P3 (seulement 4 élèves sur 11). La seule différence entre ces deux propriétés qui puisse éventuellement expliquer cette disparité dans les résultats des élèves, est le fait que P'1 ait fait l'objet d'une démonstration détaillée en devoir à la maison, ce qui a peut-être permis aux élèves de mieux la mémoriser.

La 1ère question du 3ème exercice du contrôle est donnée avec la même connaissance ancienne et dans la même configuration qu'en classe (exercice 11 en module), avec le même niveau de fonctionnement. Nous pouvons remarquer que seuls les bons élèves ont réussi à appliquer correctement la propriété. Pour cet exercice, proposé en module, les élèves ont disposé d'un temps de recherche individuelle relativement long. Nous pouvons donc nous demander si ce type de travail n'est pas uniquement bénéfique aux bons élèves, qui sont les seuls ici à avoir pu surmonter la difficulté croissante – selon nous – du niveau de mise en fonctionnement.

Dans la 2ème question de l'exercice 3, la réussite des élèves est assez élevée (23 bonnes réponses, dont l'intégralité des bons élèves, c'est donc l'exercice le mieux réussi). Est-ce le long temps de recherche en classe ou bien l'entraînement à un niveau de mise en fonctionnement plus élevé qui a favorisé cette réussite, en particulier celle des meilleurs élèves ?

Pour l'exercice 4, même s'il n'est pas très représentatif, car peu d'élèves ont abordé les deux questions, nous pouvons supposer que c'est le changement de configuration et l'association à une connaissance nouvelle différente, qui ont posé problème aux élèves dans la 1ère question (8 bonnes réponses sur 18). Il serait cependant intéressant de savoir lequel de ces deux changements les a le plus perturbés. La 2ème question portait sur une propriété qui n'avait pas été vue en exercice en classe, ce qui explique certainement l'échec des élèves (3 bonnes réponses seulement).

c) Des conclusions plus générales sur le rapport activités – apprentissages

Une lecture verticale du tableau nous permet de donner une ébauche de modèle dans l'apprentissage des élèves de cette classe sur les triangles semblables et de dégager des conditions de réussite ou d'échec au contrôle.

- Les exercices les plus réussis – et les moins réussis

Il existe une cohérence dans les résultats des élèves aux questions mettant en jeu le même type d'application d'une même propriété : en effet par exemple la propriété P1 dans les exercices 1 et 3, a été appliquée correctement dans les deux cas par les mêmes élèves (12 sur les 17 ayant abordé les deux exercices), les rares irrégularités (4 élèves) pouvant s'expliquer par un échec lié à l'algèbre, ou à la première étape de l'exercice 3.

Nous remarquons que ce sont en général les types d'exercices abordés en classe qui ont été mieux réussis par les élèves au contrôle : ceux qui ont été abordés tels quels, avec la même configuration, les mêmes connaissances associées, et avec le même niveau de complexité en ce qui concerne les adaptations à faire, ou en tout cas un niveau de mise en fonctionnement "inférieur ou égal" à celui qui a déjà été mis en œuvre au moins une fois sur cette notion, en classe ou à la maison. Dans les exercices 1 et 3, on retrouve la propriété D'1 qui a été largement appliquée en classe, et surtout la propriété P1, qui n'a pas été abordée souvent, mais sur laquelle les élèves ont passé 46 minutes, en travail individuel, sans aide décisive du professeur. Nous pouvons donc aussi penser que le temps et le type de recherche (avec ou sans aide du professeur) peuvent avoir une influence sur la manière dont les élèves retiennent, et peut-être assimilent une notion.

Les exercices qui ont été le moins bien réussis sont ceux qui n'ont jamais été vus en classe (mauvais usage de la propriété P3 chez 7 élèves dans le deuxième exercice) ou encore ceux qui ont été abordés différemment, associés avec d'autres connaissances (l'utilisation "inhabituelle" des triangles isométriques dans le dernier exercice). Lorsque les adaptations sont de plus grande complexité, les élèves sont moins performants, comme nous pouvons le constater dans les deux derniers exercices, moins bien réussis (adaptations D et E), tandis que les adaptations relativement simples des autres exercices ont été en moyenne mieux réalisées. L'exercice le moins bien réussi (exercice 4) est le seul dont la configuration soit différente de celle étudiée auparavant pour cette propriété, mais d'autres facteurs peuvent aussi rentrer en jeu : la connaissance ancienne associée est différente et placée avant l'application dans la question 1, et il y a une absence totale de travail pour la propriété de la question 2.

- Les connaissances anciennes

La position de la connaissance ancienne par rapport à la connaissance nouvelle joue peut-être un rôle dans la réussite ou l'échec des élèves. Lorsqu'elle doit être mobilisée après l'application de la propriété nouvelle, elle ne semble pas empêcher la reconnaissance par les élèves de la propriété à appliquer (22 élèves pour l'exercice 1, et 23 pour la question 1 de l'exercice 3, ce qui est bien plus élevé en moyenne que pour les autres exercices), même s'ils n'arrivent pas forcément à terminer l'exercice. Lorsqu'elle intervient avant l'application de la propriété nouvelle, les élèves sont moins nombreux à reconnaître les modalités de l'application mise en jeu.

L'association d'une propriété nouvelle à une connaissance ancienne différente de celle(s) vue(s) en classe pose certainement problème aux élèves, mais nous ne pouvons pas dire, à partir des exercices du contrôle, dans quelle mesure cela les perturbe, puisque ce changement est associé soit à une configuration différente et à un niveau de mise en fonctionnement plus élevé, et dans ce cas les élèves sont peu nombreux à reconnaître la propriété à appliquer, soit à une absence de temps de travail en classe, auquel cas ils reconnaissent la propriété mais c'est l'application qui leur pose alors problème.

- L'influence du type de travail en classe

Lorsqu'il s'agit d'utiliser une connaissance nouvelle à un niveau de mise en fonctionnement "plus élevé" que ce qui a été abordé en classe, les élèves éprouvent généralement des difficultés. Cependant, le temps de travail individuel en classe, lorsqu'il est long, en particulier ici lors des séances de module en demi-classe, pourrait favoriser la réussite des bons élèves à ce type de tâche, tandis qu'il ne semble pas être bénéfique aux plus mauvais. Nous ne pouvons cependant pas conclure qu'il s'agit bien d'un facteur déterminant, puisqu'il n'y a pas d'exemple similaire sans travail effectué en classe.

Il est difficile d'évaluer l'influence des aides apportées par le professeur, étant donné que celles-ci portent toujours sur le même contenu (la méthode à utiliser), sont souvent données sous la même forme (des questions de plus en plus fermées et des phrases inachevées à compléter) et au même moment du travail des élèves (en début de recherche puis tout au long de l'exercice).

Il y a un écart souvent assez important entre le nombre des élèves qui ont reconnu la propriété à appliquer, et ceux qui l'ont appliquée correctement. Il semblerait donc que beaucoup d'élèves aient retenu la propriété du cours, mais ne soient pas capables de la mettre en œuvre. Peut-on relier ces erreurs au manque d'initiative laissées aux élèves sur le choix de la méthode en classe ? Le professeur, en effet, pour faciliter le travail des élèves, utilise des types d'aide qui transforme les tâches complexes en tâches simples et isolées, voire même parfois non mathématiques.

- Le travail à la maison

Le travail à la maison, même si nous n'y avons pas accès, ne semble pas être plus déterminant suivant le niveau des élèves ; il a cependant bien une importance dans l'apprentissage des élèves, puisque la propriété P3, qui a fonctionné uniquement dans un exercice fait en devoir à la maison, a tout de même été reconnue et utilisée par 1/3 des élèves de la classe dans l'exercice 2 (avec plus ou moins de succès). Cela semblerait tout de même indiquer que, pour certains élèves, le devoir à la maison permettrait un apprentissage de certaines notions, ou en tout cas une réussite sur ces notions en contrôle.

Des travaux en cours semblent indiquer que c'est le travail en classe qui conditionnerait la qualité du travail à la maison (Felix, 2004), ce qui n'est pas contraire à nos résultats.

d) Des erreurs liées au type de notion ?

Il est difficile pour nous d'évaluer l'impact du choix d'introduction de la notion nouvelle sur les apprentissages des élèves. En particulier, nous avons déjà souligné la complexité du repérage des homologues, et le manque de discours technologique[58] en classe sur ce type de tâche mathématique, pourtant inévitable dans ce chapitre.

La reconnaissance des sommets homologues semble être une difficulté pour la plupart des élèves, comme le montrent leurs erreurs à la première question de l'exercice 3. Une étude plus poussée des stratégies utilisées par les élèves dans la deuxième question nous laisse penser qu'ils n'ont, pour la plupart, pas vraiment recherché les sommets homologues, mais plutôt deviné ceux-ci à l'aide de la formule à démontrer.

Nous avons voulu savoir ce que le modèle imposé par le professeur – écriture des homologues les uns en dessous des autres – pouvait apporter aux élèves. Nous avons donc relevé dans l'exercice 3 du contrôle la façon dont les élèves avaient traité le problème des homologues. Nous avons regardé combien avaient "triché" en réussissant la deuxième question sans avoir réussi ou même traité la première, et en particulier s'ils avaient fait attention à l'ordre des sommets, et à l'écriture des homologues préconisée par le professeur.

Dans le tableau suivant, nous avons mis en évidence les copies d'élèves qui avaient réussi seulement la deuxième question, et nous avons regardé leur stratégie concernant les homologues. Nous avons précisé aussi s'il s'agissait de "bons" ou de "mauvais" élèves selon notre classement.

[58] il est toutefois possible que ce discours prenne place dans le cours sur les triangles isométriques, auquel nous n'avons pas assisté

Ex 3		écriture "l'un en dessous de l'autre"	sommets homologues dans l'ordre	"Bons ou mauvais"
D'1	**P1**			
f	**b**	**o**	**o**	**M**
f	**b**	**o**	**o**	**B**
f	**b**	**n**	**o**	**M**
b	b	o	o	B
x	x	x	x	M
f	**(b)**	**o**	**n**	**B**
b	b	o	n	B
f	**(b)**	**n**	**n**	**M**
x	x	x	x	M
f	**b**	**o**	**o**	**M**
x	**b**	**n**	**o**	**M**
b	b	o	o	B
f	**b**	**n**	**n**	**B**
b	b	o	o	B
b	b	n	n	B
f	x	o	n	M
b	b	o	o	B
f	f	o	o	M
b	b	n	n	B
f	x	o	n	M
f	**(b)**	**n**	**n**	**M**
b	b	n	n	B
x	**b**	**n**	**o**	**B**
x	x	x	x	M
x	x	x	x	M
f	**(b)**	**o**	**n**	**M**
(b)	b	n	n	B
x	**b**	**n**	**n**	**B**
x	x	x	x	M
f	x	x	x	M
f	**(b)**	**n**	**n**	**B**
b	b	o	o	B
f	f	o	n	M
10	**23**	**15**	**12**	

De ce tableau, nous pouvons déjà tirer plusieurs réponses à nos questions. Voici une première synthèse des résultats des 27 élèves ayant abordé l'une de ces deux questions, en fonction du classement "bons" ou "mauvais" :

	Bons élèves	Mauvais élèves	Total
Elèves ayant réussi les deux questions	10	0	10
Elèves ayant réussi la deuxième question mais pas la première	15	8	23

Tout d'abord, le fait que 23 élèves aient réussi la deuxième question, alors que seuls 10 élèves avaient réussi la première, nous incite à regarder de plus près la façon dont le lien entre les questions a été abordé par les élèves. Aucun élève par ailleurs n'a réussi la première question sans réussir la deuxième[59].

Nous remarquons que parmi les 13 élèves ayant réussi la deuxième question et pas la première, 8 sont des "mauvais" élèves et 5 des "bons" élèves. Il semblerait donc que le niveau des élèves ne joue pas un très grand rôle sur leur stratégie dans cet exercice pour réussir à articuler les deux questions.

Regardons maintenant comment ont été traités les sommets homologues.

	Bons élèves	Mauvais élèves	Total
Elèves ayant écrit les homologues dans l'ordre	7	5	12
Elèves ayant écrit les homologues l'un en dessous de l'autre	8	7	15

L'écriture recommandée par le professeur a été choisie par 15 élèves – 8 bons et 7 mauvais, ici encore, pas de différence suivant le niveau. Seulement 12 élèves ont écrit les homologues dans le bon ordre, quel que soit le format de l'écriture adoptée, et parmi ceux-là, 5 ont réussi la première question. Pour les 5 autres réussites à la première question, 4 élèves n'ont pas même écrit les

[59] La première question nécessitait un calcul d'intermédiaires, difficulté qui peut expliquer cette réussite moindre des élèves. Seuls les "bons" élèves ont réussi la première question, ce qui semblerait indiquer que ce sont les seuls à surmonter la difficulté du NMF.

sommets les uns en dessous des autres. Evidemment, nous ne savons pas si les élèves ont trouvé l'ordre des homologues après coup, ou bien si au contraire cela leur a permis de résoudre la question 1). Il ne semble pas en tout cas que le fait de savoir ordonner les homologues soit un facteur de réussite déterminant ici pour la première question.

Voyons maintenant si les élèves font un rapprochement entre "ordre" et "écriture" :

	Elèves ayant écrit les homologues l'un en dessous de l'autre	Elèves n'ayant pas écrit les homologues l'un en dessous de l'autre
Elèves ayant écrit les homologues dans l'ordre	9	3
Elèves ayant écrit les homologues dans le désordre	6	9

Seulement 9 élèves ont écrit les homologues dans le bon ordre et les uns en dessous des autres (5 bons et 4 mauvais), ce qui semblerait indiquer que cette écriture n'a pas forcément de sens – ou de valeur technique – pour beaucoup d'élèves, bons ou mauvais. Parmi les 12 élèves qui n'ont pas respecté la disposition des sommets, 3 seulement ont écrit les sommets dans le bon ordre. Il y a 6 élèves qui ont placé des sommets non homologues les uns en dessous des autres, et pour lesquels, vraisemblablement, cette écriture ne correspond pas à une compréhension du travail de repérage – du moins au moment du contrôle.

Il y a 9 élèves qui n'ont su ni écrire correctement, ni ordonner les homologues. Pouvons-nous en déduire que cet apprentissage n'a pas eu lieu pour ces élèves ? Si nous regardons leur classement, nous remarquons que parmi ces 9, 7 sont des bons élèves. Nous pouvons donc aussi imaginer que cette écriture n'est pas retenue par ces élèves, parce qu'ils font "autrement". Comment font-ils ? Il est impossible pour nous de le savoir à partir de nos données, mais c'est une question très intéressante.

Il nous faut maintenant regarder si ces élèves ont réussi la première question, pour voir si la méthode leur a fait défaut, ou bien s'ils en ont une "meilleure". Voyons alors s'il y a une corrélation entre la manière de gérer les homologues, et la réussite aux questions du contrôle :

	Réussite à la première question	Réussite à la deuxième question
Bon ordre des homologues seulement	0	3
"Bonne" écriture des homologues seulement	1	3
Les deux	5	8
Ni l'un ni l'autre	4	9

Parmi les 9 élèves qui n'ont pas utilisé l'écriture préconisée, ni même une écriture dans l'ordre, 4 ont pourtant réussi la première question. Pour les 5 autres réussites à cette question, les élèves ont utilisé l'écriture modèle, et ne s'en sont pas sortis en écrivant seulement les sommets dans l'ordre. Pour la deuxième question, 9 élèves sur 23 ont réussi sans travail apparent sur les homologues.

Il semblerait donc que l'écriture donnée en modèle ne soit pas, pour certains élèves – en particulier les "bons" – une méthode facilitant le repérage des homologues. Pour les moins bons, la réussite à un exercice de contrôle ne semble pas correspondre à une maîtrise de cette écriture, mais il est difficile pour nous de conclure sans savoir quelle part la "triche" a pris dans les stratégies des élèves.

Peut-on vraiment leur reprocher cette "triche" ? Nous pouvons peut-être y voir leur capacité à reconnaître les modalités d'application de la propriété – quitte à construire ces modalités pour répondre au contrat didactique. Les adaptations souvent travaillées en classe se font sans que le repérage des homologues ne soit à la charge des élèves, et ceux-ci, même s'ils ne semblent pas savoir repérer les homologues, sont visiblement capables de reconnaître la propriété à appliquer. Cela ne contredit pas les hypothèses que nous avions formulées au départ : c'est ce qui est travaillé en classe le plus souvent – ici une application simple et sans repérage – qui est le mieux réussi au contrôle.

Comment alors faudrait-il envisager l'enseignement de ce repérage en classe ? Nous ne savons pas s'il peut exister une approche des triangles semblables – d'après les conditions dictées par les programmes et les contraintes horaires – qui permette de prendre en charge ce problème.

e) Limites de notre recherche sur madame B

Tout ne peut pas être vérifié ici ; il aurait fallu en effet pouvoir isoler chacune des variables qui nous intéressent pour pouvoir en mesurer l'importance. Il nous fallait donc envisager, lors de nos observations suivantes, d'intervenir auprès du professeur pour l'élaboration de l'énoncé du contrôle, pour, en fonction de ce qui a été fait en classe, tester plus précisément à travers les exercices du contrôle les manques du cours. Ceci n'a pas pu être fait, pour des raisons de temps : il était difficile d'analyser l'intégralité des séances en classe suffisamment rapidement après la fin du chapitre, pour pouvoir construire une évaluation qui ne soit pas trop tardive.

Pour mesurer, par exemple, l'effet d'un changement de configuration sur la réussite des élèves, il nous faudrait l'associer, dans le contrôle, à une connaissance ancienne et un niveau de mise en fonctionnement identiques à ceux qui ont été vus en classe. Il nous faudrait de la même manière, tester l'influence du type et du temps de travail en classe, sur la capacité des élèves à surmonter une difficulté en contrôle ; ou encore le rôle de la connaissance ancienne associée en fonction de sa nature et de sa position, ou enfin l'influence des aides en fonction de leur contenu, forme et moment.

D'autre part, le classement des élèves que nous avons utilisé est relatif à ce seul contrôle, et, comme nous l'avons signalé précédemment, par conséquent difficile à utiliser pour tirer des conclusions quant à une différenciation éventuelle des apprentissages des élèves. Les élèves sont-ils "bons" parce qu'ils bénéficient du type de travail proposé par le professeur en classe, ou en bénéficient-ils parce qu'ils sont "bons" ? Nous avons cependant, en fonction des orientations des élèves pour la classe de 1ère, une idée plus précise du niveau de ceux-ci, et donc de la pertinence de notre classement.

Une autre question se pose, mais qui n'était pas l'objet de notre recherche, puisque nous nous intéressions surtout ici à l'élève : nous pouvons nous demander comment le professeur conçoit l'énoncé de son contrôle et ce qu'il souhaite réellement tester chez les élèves. Comment mesure-t-il la complexité d'une telle évaluation, et quels sont ses moyens pour en déduire ce qu'elle révèle de l'état réel des apprentissages des élèves ?

f) Des résultats moins lisibles pour les deux autres professeurs

C'est pour compléter ces premières observations que nous avons choisi d'observer deux autres classes sur ce même chapitre. Malheureusement, tous les points restés ici obscurs ne pourront pas toujours être vérifiés à l'aide de nos deux autres observations. En effet, au sujet de la différentiation entre les élèves ou du rapport entre classe et évaluation, nous rencontrons encore des manques dans nos observations, qui nous empêchent de conclure.

Nous aurions pu peut-être choisir les deux nouveaux professeurs de manière à ce que la comparaison soit facilitée : par exemple dans des établissements de niveau similaire au premier. Mais nous avons déjà souligné la difficulté d'avoir accès à ces observations en classe, et c'est pourquoi nous ne pouvions nous permettre d'être trop exigeants quant au choix des classes observées.

Nous ne pouvions prendre le risque d'attendre une année de plus, et , qui sait, de voir le chapitre "triangles semblables" disparaître à nouveau des programmes pendant trente ans !

Toutefois, ces observations, en ce qu'elles sont à la fois semblables et dissemblables à celle-ci, nous permettent de dresser une comparaison entre les trois professeurs et de préciser les régularités et les différences de leurs pratiques, afin de mieux comprendre les difficultés soulevées par la notion de triangles semblables.

Nous allons donc exposer dans le chapitre suivant nos analyses pour deux autres professeurs, et essayer de tirer de la comparaison des trois observations, à la fois des constantes et des variations dans les pratiques, mais aussi des influences diverses de ces pratiques sur les apprentissage

V) Comparaison entre les trois professeurs : variations et régularités

Pour pousser plus loin notre recherche sur les liens entre pratiques et apprentissages sur les triangles semblables, nous avons observé, l'année suivant nos premières analyses, deux autres professeurs, qui ont eu la gentillesse eux aussi d'accueillir notre caméra dans leur classe.

1) Nos analyses pour Mme P. 164

a) Présentation de Mme P. 164
b) Analyse des tâches a priori 166
c) Déroulement 182
d) Bilan des tâches en classe et à la maison 183
e) Analyse des tâches du devoir à la maison et des contrôles 189
f) Bilan des tâches des trois devoirs 194
g) Résultats des élèves 194
h) Comparaison avec les tâches du cours et interprétation 200

2) Nos analyses pour Mme F 205

a) Présentation de Mme F. 205
b) Analyse a priori des tâches en classe ou à la maison 206
c) Déroulement 215
d) Bilan des tâches en classe et à la maison 215
e) Analyse des tâches du contrôle 220
f) Bilan de tâches du contrôle et comparaison 222
g) Résultats des élèves 222
h) comparaison avec les tâches du cours et interprétation 225

3) Comparaison des trois professeurs : Variations et régularités 227

a) Les composantes personnelles et institutionnelles 227
b) L'introduction de la notion nouvelle 228
c) Les tâches a priori 230
d) Le déroulement des activités 233
e) Le système {contenu + déroulement} 234
f) L'évaluation finale 236
g) Les résultats des élèves 236

4) Essai de caractérisation des stratégies des trois enseignants 237

5) Illustration : comparaison sur un exercice classique posé dans les trois classes 238

6) Ce qui pose problème aux élèves de ces trois classes 240

a) Le repérage des homologues 240
b) Le type de travail en classe 241

Nous avons réalisé les mêmes analyses que précédemment, que nous allons brièvement exposer ici dans un premier temps. Nous verrons que les résultats obtenus ne viennent pas contredire nos premières constatations, mais ne les confirment pas non plus, enrichissant plutôt le questionnement.

Nous avons ensuite essayé de comparer les trois classes, dans le but de dégager des régularités et des variations dans les pratiques de ces trois professeurs, dues en grandes parties aux contraintes liées au métier d'enseignant, et d'en déduire si possible des liens avec les apprentissages des élèves.

Nous avons aussi voulu comparer les différentes approches de la notion de triangles semblables choisies par chacun des professeurs à celles qui sont proposées par les programmes, et essayer de comprendre les difficultés que cela avait pu engendrer chez leurs élèves.

1) Nos analyses pour Mme P.

a) Présentation de Mme P.

Mme P. enseigne dans un bon lycée parisien, sa classe de seconde est, d'après elle, de bon niveau. Nous disposons des vidéos de sept séances, bien qu'une douzaine de séances aient eu lieu. Les vidéos ont été filmées par le professeur lui-même dans sa classe.

Les séances[60] se répartissent suivant le tableau suivant, reconstitué à l'aide des vidéos et des indications du professeur :

[60] voir ANNEXES : découpage des séances de Mme P.

séances	cours	exercices
1	classe entière Rappels isométriques et introduction de la notion introduction de D1, D'1, P1	activité d'introduction démonstration de P1
2	exercices (classe entière)	1 application de D'1 et 2 de D'1 + P1
3	module (demi-classe)	4 applications de D'1, 1 de P1 et 4 de D'1 + P1
4	aide individualisée 7 élèves (non filmé)	2 applications de D'1 + P1
5	cours et exercices (classe entière) introduction de P2, P'1 et P3	1 application de D'1 + P1 introduisant P2, 2 applications de D'1 + P1 dont l'une introduisant et démontrant P'1
6	module (demi-classe)	Applications de P'1, D'1, D'1 + P1, P2
7	exercices (classe entière)	Applications de D'1, P2 et P1
8	exercices (classe entière)	Application de D'1 + P2 et de D'1 + P1
	contrôle 1 (non filmé)	
9	module (demi-classe) (non filmé)	Application de P'1
10	aide individualisée 8 élèves (non filmé)	Ex de repérage des homologues, D'1 et P1
Vacances scolaires		
11	correction du devoir et du contrôle (non filmé)	
12	contrôle 2 (non filmé)	

La notion de triangles isométriques a été introduite auparavant à l'aide des transformations. La notion de triangles semblables n'a pas été introduite tout de suite après le chapitre sur les triangles isométriques, puisque plusieurs mois se sont écoulés entre les deux. C'est un choix qui ne correspond pas à ce qu'on trouve dans les manuels en général ou dans les programmes, mais qui permet d'introduire la notion de triangles semblables, non pas comme une extension – un peu "boiteuse" on l'a vu – des triangles isométriques, mais plutôt comme une réponse à un problème.

Le professeur a d'ailleurs choisi, pour introduire cette notion nouvelle, une activité qui engageait les élèves à répondre au problème suivant : comment faire pour caractériser des triangles de même forme. Pour cela, le professeur a fait dessiner aux élèves un triangle dont on connaissait deux angles, et leur a fait comparer les triangles obtenus dans la classe, et constater la proportionnalité des côtés. Ces triangles construits pour introduire la notion seront réutilisés tout au long du cours sur ce chapitre, pour introduire les nouvelles propriétés.

Le manuel utilisé pour certains exercices, en particulier ceux à faire à la maison est le *Transmath (programme 2000),* les autres exercices sont distribués aux élèves au fur et à mesure. Les énoncés distribués figurent en annexe.

Nous allons détailler maintenant les différentes tâches proposées par le professeur sur ce chapitre, en cours ou à la maison, que nous récapitulons ensuite dans un tableau de synthèse similaire à celui dressé pour Mme B., en tenant compte du déroulement des activités qui en découlent en classe.

b) Analyse des tâches a priori

Nous détaillons ici l'analyse de chacune des tâches proposées en classe ou à faire à la maison

- 1ère séance

exercice d'introduction : *construire un triangle dont on connaît deux angles (60° et 45°) sans rapporteur.* *calculer les longueurs exactes des côtés, la hauteur et l'aire du triangle obtenu.*

Il s'agit ici de construction et de trigonométrie, ne mettant pas encore en jeu les propriétés nouvelles du chapitre.

Cet exercice sera repris plus tard : à la fin de la première séance, pour calculer les longueurs et l'aire du triangle construit (application de P1), puis lors de la 5ème séance pour montrer que les hauteurs des deux triangles sont dans le même rapport de proportionnalité que les côtés, en appliquant D'1 dans des triangles bien choisis puis P1.

Au total les élèves passeront 78 minutes à travers ces trois séances sur cet exercice, sans compter le travail effectué à la maison !

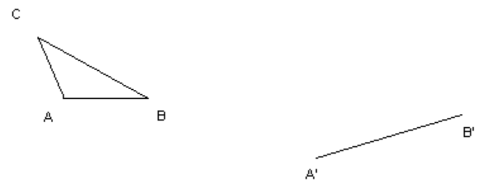
démonstration de la propriété : *lorsque deux triangles sont semblables leurs côtés sont proportionnels*

Il faut reporter les longueurs du petit triangle sur le grand pour les placer en configuration de Thalès (côtés parallèles grâce aux angles correspondants), le triangle ainsi construit et le triangle de départ sont alors isométriques. On en déduit ensuite les rapports de longueurs égaux grâce au théorème de

Thalès. Il s'agit d'une méthode à mettre en place, qui nécessite l'introduction d'étapes pour les élèves, et qui fait appel à des connaissances anciennes. On utilise la définition D'1 de deux triangles semblables, mais sans la faire travailler : les étapes mises en place concernent plutôt le travail des propriétés anciennes (Thalès et isométrie)

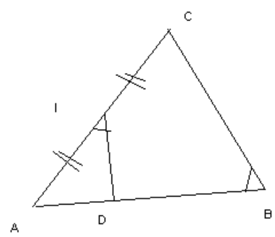
- 2ème séance

exercice 1 : *soient le triangle ABC et le segment [A'B'] ; construire à la règle et au compas le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC.*



Pour tracer le triangle A'B'C' il faut reporter les longueurs du triangle ABC à partir du point A' puis du point B' afin de retrouver l'angle B'A'C' et l'angle A'B'C' qui sont égaux respectivement aux angles BAC et ABC. On utilise ici la propriété D'1, sans repérage nécessaire des homologues. Cet exercice nécessite l'introduction d'étapes (en particulier : par quoi on commence ?)

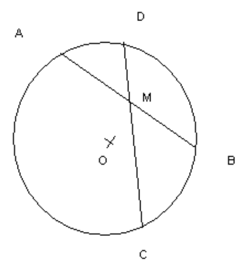
exercice 2 : *ABC triangle tel que AB = 42mm, AC = 28mm, BC = 36mm ; on note I le milieu de [AC] et D le point de [AB] tel que les angles AID et ABC soient égaux. Calculer AD et ID*



Il faut démontrer tout d'abord que les triangles AID et ABC sont semblables avec la définition D'1, à l'aide des angles I et B qui sont égaux et de l'angle A qui est commun. La similitude des triangles n'est pas demandée ici, il faut donc introduire cette étape pour pouvoir calculer les longueurs demandées. On utilise ensuite la propriété P1 pour la proportionnalité des côtés et le calcul de AD et ID. Le repérage des sommets homologues n'est pas indiqué, il est d'autant plus complexe que les deux triangles sont emboîtés.

Dans cet exercice, la similitude n'apparaît pas clairement ; il n'est pas demandé de trouver des triangles semblables, mais ils constituent ici un outil pour calculer des longueurs inconnues sur la figure. Nous étudierons plus loin, dans le chapitre d'analyse des exercices de manuels, si on pouvait envisager la résolution de cet exercice sans les triangles semblables, et de manière tout aussi – voire plus – efficace.

exercice 3 :
tracer un cercle de centre O et de rayon 5cm ; placer un point M à 3cm de O et tracer deux cordes quelconques passant par M notées [AB] et [CD].
1) démontrer que MA x MB = MC x MD (on note p ce nombre)
2) calculer p, comment varie-t-il lorsque la distance OM varie ?



Il faut démontrer au préalable que les triangles AMC et BMD sont semblables, à l'aide de D'1 et du théorème de l'angle inscrit (2 fois ou 1 fois avec les angles M opposés parle sommet). On déduit le produit à l'aide de la propriété P1. On calcule ensuite p en prenant une corde particulière (un diamètre). On conclut en posant x = OM et en étudiant la fonction ainsi obtenue.

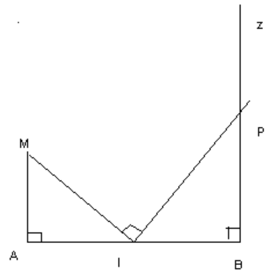
La première question nécessite de la part des élèves une introduction d'étapes (démonstration de la similitude) mettant en jeu une connaissance ancienne, le repérage des homologues n'est pas facilité par l'énoncé.

La deuxième question nécessite de faire un choix, et de changer de cadre. Elle ne met pas en jeu les propriétés nouvelles sur les triangles semblables.

Cet exercice est à terminer à la maison, et sera corrigé lors de la séance suivante, en module.

- $3^{ème}$ séance (module)

exercice 4 : *(AM) et (Bz) sont perpendiculaires à (AB) ; AM = 1.6, AI = 2 et IB = 3 ; la perpendiculaire à (MI) en I coupe [Bz) ; calculer BP.*



La similitude des triangles n'est pas demandée ici, il faut cependant introduire cette étape pour pouvoir calculer les longueurs demandées. Il faut d'abord démontrer la similitude des triangles AIM et BPI à l'aide de D'1 ; pour cela on utilise les deux angles droits et on démontre l'égalité des angles AIM et BPI à l'aide d'un calcul sur la somme des angles d'un triangle et sur la somme des angles composant l'angle plat. On utilise ensuite la propriété P1 pour calculer la longueur BP. Le repérage des homologues n'est évidemment pas indiqué par l'énoncé.

vrai-faux *1) semblables => isométriques* *2) isométriques => semblables* *3) tous les triangles isocèles sont semblables* *4) tous les triangles rectangles isocèles sont semblables* *5) tous les triangles rectangles sont semblables* *6) tous les triangles équilatéraux sont semblables* *7) un triangle a un angle de 72° et un angle de 37°, un autre a un angle de 71° et un angle de 72° ; ces deux triangles sont semblables* *8) deux triangles, EFG isocèle en F et PQR isocèle en Q, sont semblables ; de plus l'angle E vaut 70° ; alors l'angle Q vaut 50°* *9) MNP et IJK sont semblables ; alors MN / IJ = MP / IK* *10) RED et BUS sont semblables ; les angles D et B sont égaux, ainsi que les angles R et U ; alors DR / BU = RE / US*

pour le 1), le 3) et le 5) il suffit de donner un contre-exemple

pour le 2) on utilise D'1 : il faut aussi se souvenir que des triangles isométriques ont des angles égaux

pour le 4) on utilise D'1 : il suffit de donner la valeur de deux angles des triangles rectangles isocèles (45° et 90°)

pour le 6) on utilise D'1 : il suffit de donner la valeur de deux angles des triangles équilatéraux (60°)

pour le 7) on utilise D'1 il faut calculer d'abord le 3ème angle de chaque triangle et constater que les trois angles sont égaux

pour le 8) il faut calculer la somme des trois angles (70°+70°+50°=190°) et constater qu'elle est différente de 180°

pour le 9) il faut remarquer qu'on ne connaît pas les sommets homologues, et qu'on ne peut pas associer les points n'importe comment !

pour le 10) il suffit de trouver les homologues en écrivant correctement les noms des deux triangles, et de déduire les rapports de longueurs égaux à l'aide de P1.

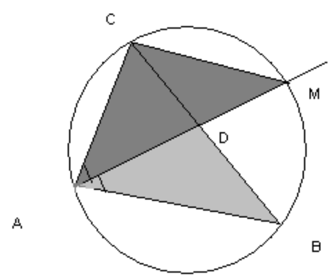
- - 4ème séance (aide individualisée)

exercice AI1 :
dans le triangle ABC, AB=3cm, BC=5cm, CA=6cm, le triangle EFG est semblable à ABC et on sait que les angles A et F sont égaux, ainsi que les angles B et E, et que EF=4.2cm.
a) calculer le périmètre de EFG
b) comparer EF / AB avec p'/p où p' est le périmètre de EFG et p celui de ABC

Il faut utiliser P1 : la proportionnalité des côtés homologues des triangles semblables, et, les homologues étant indiqués par l'énoncé, écrire les rapports de longueur pour calculer les côtés EG et FG, et en déduire les périmètres en faisant la somme des côtés.

Il s'agit ici d'un exercice proposé en aide individualisée, c'est-à-dire à des élèves qui ont des difficultés en mathématiques. On peut remarquer que c'est la première fois que le repérage des homologues est pris en charge par l'énoncé. La deuxième question fait travailler la proportionnalité plus que les triangles semblables.

exercice AI2 :
un triangle ABC est inscrit dans un cercle, la bissectrice de l'angle BAC coupe (BC) en D et le cercle en M
a) démontrer que les triangles ABD et ACM sont semblables
b) démontrer que AB x AM = AD x AC

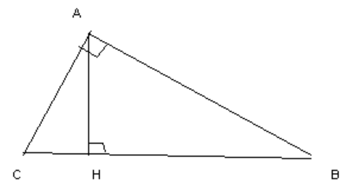


On démontre la similitude des triangles à l'aide de D'1, après calcul d'intermédiaires. On utilise en effet l'égalité des angles CAD et DAB (bissectrice) et CMA et CBA (angles inscrits interceptant le même arc). On utilise ensuite la propriété P1, sans adaptation préalable, pour écrire les rapports de longueur et faire les produits en croix. Les noms des triangles ne sont pas écrits dans le bon ordre, laissant aux élèves la responsabilité du repérage des homologues.

Ces deux exercices d'aide individualisée sont de niveau beaucoup plus simple que ce qui a été déjà proposé en classe ; en particulier en ce qui concerne les adaptations demandées sur les propriétés nouvelles : pas d'introduction d'étape ici.

- $5^{ème}$ séance

exercice 5 :
ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A
1) y a-t-il des triangles semblables parmi ABC, ABH et ACH ?
2) démontrer que $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times CB$, $AH^2 = HB \times HC$
3) applications :
construire un segment de longueur $\sqrt{7}$ uniquement à la règle et au compas (utiliser la $3^{ème}$ égalité du 2)
donner une démonstration du théorème de Pythagore



On démontre la similitude de ACH, ABH et CAB à l'aide de D'1 après des calculs sur les angles, puis on en déduit par P1 les rapports de longueurs égaux, puis les expressions demandées par produits en croix. Les noms des triangles sont écrits dans le désordre.

Pour la première application, on construit un triangle dont la hauteur coupe [BC] en deux segments de longueur 2 et 3.5cm ; on retrouve ensuite le point A en traçant le cercle de diamètre [BC] et son intersection avec la hauteur ; d'après la troisième égalité, la hauteur vaut donc 7cm.

On re-démontre le théorème de Pythagore en combinant les égalités obtenues ; en effet :

$AB^2+AC = BH \times BC + CH \times CB = BC (BH+CH) = BC^2$

Dans cet exercice, les triangles semblables constituent un outil permettant d'établir des propriétés caractéristiques des longueurs du triangle rectangle. Cependant, comme l'énoncé est découpé en plusieurs questions distinctes, cela reste un exercice portant sur les triangles semblables en tant qu'objet.

exercice 6 :

ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que A'B' = 3AB, A'C' = 3AC, B'C' = 3BC

1) démontrer que ABC et A'B'C' sont semblables

2) la hauteur issue de A dans ABC coupe [BC] en H ; la hauteur issue de A' dans A'B'C' coupe [B'C'] en H'. Calculer A'H'/AH, comparer les aires des deux triangles.

La première question, peut se résoudre en appliquant P'1, les trois côtés des triangles étant proportionnels. Toutefois, le professeur n'a pas encore donné la propriété en question aux élèves, il faut donc envisager une autre méthode, qui sera donc ici la démonstration de la réciproque. Pour démontrer cette propriété, les élèves peuvent superposer les deux triangles en reportant deux des longueurs du petit sur le grand, et prouver l'isométrie entre le triangle obtenu et le triangle de départ (à l'aide du théorème de Thalès, en calculant la longueur du troisième côté), puis le parallélisme des côtés avec la réciproque du théorème de Thalès, pour en déduire des égalités d'angles (correspondants), puis la similitude. On démontre ensuite la similitude de ABH et A'B'H avec D'1 et deux angles identiques, puis on en déduit le rapport 3 des hauteurs avec P1, et enfin celui des aires en effectuant le calcul littéral. Pour cette dernière question, on peut aussi utiliser P2, mais cette propriété n'a pas encore été donnée par le professeur.

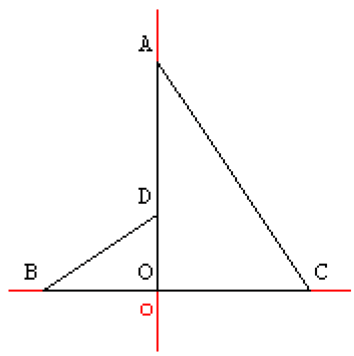
- 6ème séance (module)

ex 61 p 216 :

dans un repère orthonormal d'origine O, on donne A(0;6), B(-3;0), C(4;0) et D(0;2).

1) démontrer que les triangles OAC et OBD sont semblables

2) en déduire que (BD) et (AC) sont perpendiculaires



On utilise le calcul de longueur à l'aide des coordonnées des points (géométrie analytique) pour déterminer les longueurs des trois côtés (ou bien deux côtés et la mesure d'un angle calculée par trigonométrie) puis on écrit les rapports de longueurs et on utilise la propriété P'1 pour conclure à la similitude (P3 avec un angle et deux côtés proportionnels). Les noms des triangles sont donnés dans l'ordre. Le repérage des homologues est facilité d'autre part par le calcul des longueurs des côtés, qui permet de classer et d'associer plus facilement les segments.

On peut prouver ensuite l'angle droit en prolongeant (BD) et à l'aide de calculs simples sur les angles complémentaires.

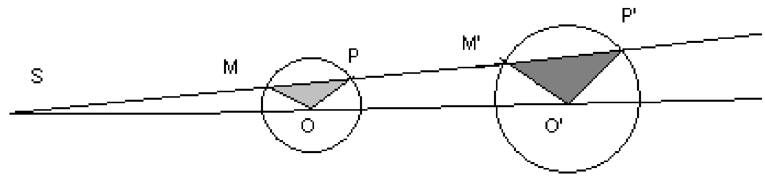
Une autre méthode pour résoudre cet exercice serait d'utiliser le produit scalaire, mais ce n'est pas du niveau de la classe de 2nde.

exercice 7 :

C et C' sont deux cercles de centre respectif O et O' ; M est un point quelconque de C et M' un point de C' tel que (OM) et (OM') sont parallèles. La droite (MM') coupe (OO') en S et recoupe C et C' en P et P' respectivement.

1) démontrer que les triangles OMP et O'M'P' sont semblables

2) démontrer que les droites (OP) et (O'P') sont parallèles.

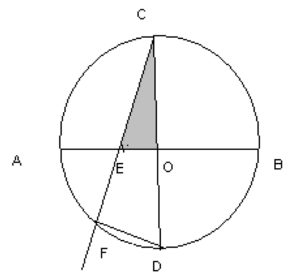


Pour démontrer la similitude, on utilise D'1 et le fait que ce sont deux triangles isocèles (OP=OM=rayon) et que les angles OMP et O'M'P' sont égaux (correspondants), donc les angles OPM et O'P'M' aussi. Pas de problème ici avec le repérage des homologues.

De l'égalité des angles OPM et O'P'M' , on déduit le parallélisme des droites (OP) et (O'P').

Dans cette configuration, les cercles et les triangles sont homothétiques, et la démonstration aurait pu se faire à l'aide d'une transformation (homothétie de centre S).

exercice 1 fiche 2 :
tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD], placer le point E sur le segment [OA] tel que OE=1cm. La droite (CE) recoupe le cercle en F. On veut calculer l'aire du triangle CFD.
1) démontrer que les triangles COE et CFD sont semblables
2) a) calculer CF et FD, calculer l'aire de CFD
b) autre méthode: calculer le rapport d'agrandissement qui fait passer du triangle COE au triangle CFD. Calculer l'aire du triangle COE, en déduire celle de CFD



On démontre la similitude des deux triangles en utilisant D'1 avec un angle commun et un angle droit (triangle inscrit dans un demi cercle), on en déduit les longueurs par la propriété P1, puis l'aire en utilisant la formule (base x hauteur) / 2, (ici CF x CD / 2). Les noms des triangles sont ici donnés dans le bon ordre. Pour l'autre méthode, on utilise les rapports de longueur pour trouver le rapport de similitude, puis le rapport des aires en utilisant P2.

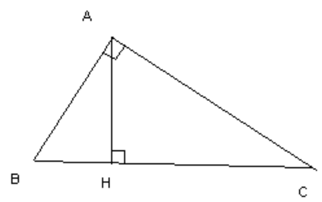
Cette deuxième méthode utilisant une propriété des triangles semblables, ne paraît pas particulièrement avantageuse par rapport à la première, qui utilise elle aussi la similitude (pour calculer CF ou FD).

- 7ème séance

ex 65 p 216 :
xAy est un angle aigu, B et C sont deux points de [Ax) tels que AB = 28 mm et AC = 75 mm, D et E deux points de [Ay) tels que AD = 21 mm et AE = 100 mm
1) démontrer que ABD et ACE sont semblables
2) quel est le rapport de réduction?
3) est-il exact que l'aire de ABD = 8% de l'aire de ACE ?

On utilise les rapports de longueurs et l'angle commun pour démontrer la similitude à l'aide de P3 (reconnaissance simple des modalités), on en déduit le rapport de similitude à l'aide de P1 et celui des aires à l'aide de P2, que l'on compare à 8% = 8 / 100 = 2 / 25. Les noms des triangles sont ici dans le désordre, le repérage peut se faire à l'aide des côtés homologues.

ex 77 p 217 :
ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC]
démontrer que (aire ABH) / (aire AHC) = (tan C)²



On démontre d'abord la similitude des triangles ABH et AHC à l'aide de D'1, avec l'angle droit et d'un calcul d'angles complémentaires.

On détermine ensuite le rapport de similitude HB/HA = tan (BAH) = tan C car les angles BAH et ACH sont égaux. On détermine enfin le rapport des aires grâce à P2.

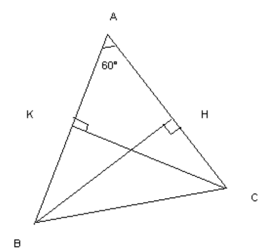
PB Euclide :
soit ABC un triangle, comment tracer M et N sur les segments [AB] et [AC] pour que (MN)//(BC) et que l'aire de AMN soit la moitié de celle de ABC ?

Il s'agit ici d'un problème de construction, qui nécessite des choix à faire pour l'élève. Tout d'abord il faut déterminer le rapport de similitude, qui vaut √(1/2) d'après P2 puisque le rapport des aires vaut 1/2, ensuite on trouve l'emplacement du point M en traçant un carré de côté AB et en constatant que la demi diagonale de ce carré mesure √(1/2) x AB. Il ne reste plus qu'à reporter cette longueur sur [AB] et à tracer la parallèle à (BC) passant par M qui coupe (AC) en N.

Il s'agit d'une question ouverte, et la similitude n'est pas mentionnée ici, même si elle constitue un outil intéressant pour résoudre le problème.

- 8ème séance (non filmée)

exercice en plus :
soit un triangle ABC tel que l'angle A mesure 60°, les hauteurs issues de B et C coupent les côtés en H et K, déterminer le rapport des aires de AKH et ABC



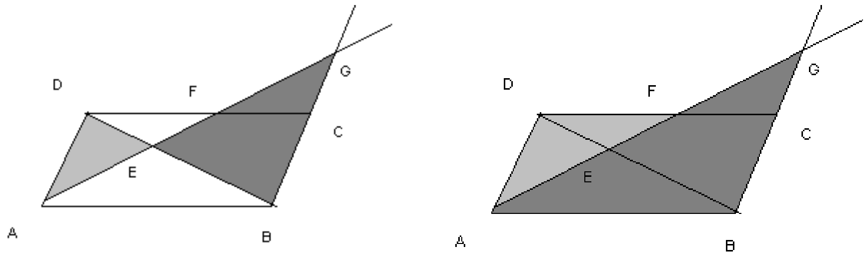
Il n'est pas fait mention ici de la similitude, qui constitue un outil pour répondre au problème. On peut en effet tout d'abord démontrer que les triangles AKH et ABC sont semblables, pour cela; il y a deux méthodes. On peut utiliser le cosinus de A dans les triangles AKC et AHB, ce qui nous donne AH = ½ AB et AK = ½ AC, comme de plus l'angle A est commun aux deux triangles, en utilisant P3, on obtient la similitude. On peut aussi utiliser D'1 et le fait que deux angles des triangles ont même mesure (90° et 60°). Dans ce dernier cas, on doit tout de même utiliser la trigonométrie pour calculer le rapport de similitude de ½, on obtient ensuite par P2 que le rapport des aires vaut ¼ .

exercice 2 fiche 2:

ABCD étant un parallélogramme, une droite passant par A coupe (DB) en E, (DC) en F et (BC) en G. On sait que AE=5, EF=3, on cherche la longueur FG.

1) démontrer que les triangles ADE et BEG sont semblables ainsi que les triangles ADF et ABG.

2) calculer FG



On démontre la similitude de ADE et BEG à l'aide de D'1 avec l'angle E (opposé par le sommet) et des angles DAE et EGB (alternes internes), on démontre de même celle de ADF et ABG avec les angles DAF et ABG qui sont égaux (angles opposés du parallélogramme) et des angles DAF et AGB qui sont alternes internes. Les noms des triangles sont donnés dans le désordre.

On écrit ensuite en appliquant P1 les égalités des rapports de longueurs,

ED / EB = EA / EG = <u>DA / BG</u> d'une part et <u>DA / BG</u> = DF / BA = AF / GA d'autre part, donc tous ces rapports sont égaux.

On combine enfin ces rapports pour obtenir la longueur demandée,

en utilisant FG = AG – AF , et connaissant les longueurs AE et EF,

on a d'une part : AF / AG = 8 / (8 + FG)

et d'autre part AF / AG = EA / EG = 5 / (3 + FG),

on doit donc résoudre l'équation algébrique: 5/(FG+3)=8/(FG+8) pour trouver FG.

Les exercices suivants : dernières séance de module et dernière aide individualisée sur ce chapitre, ont été donnés après le premier contrôle, et avant le deuxième.

- contrôle

Nous analysons plus loin les exercices qui le constituent

Les exercices des séances qui suivent ne préparent évidemment pas à ce contrôle, mais tout de même au contrôle suivant, nous en faisons donc aussi l'analyse.

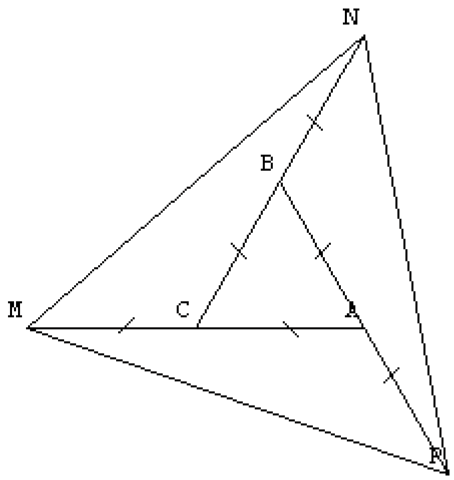
- 9ème séance (module) (non filmée)

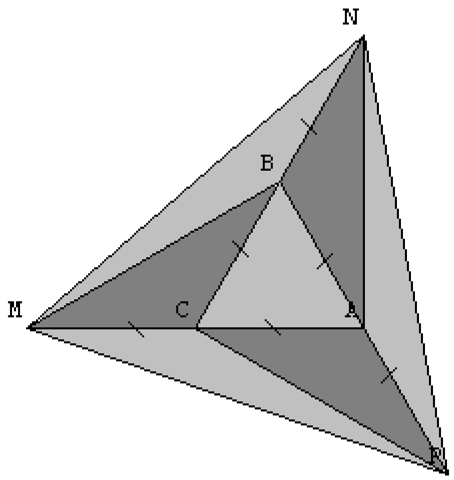
exercice mod3:

ABC équilatéral, construire M symétrique de A par rapport à C, P symétrique de B par rapport à A et N symétrique de C par rapport à B.

1) démontrer que APM, CMN ET NBP isométriques, en déduire ABC et MPN semblables. Quelle est la nature de MPN ?

2) démontrer que l'aire de MPN = 7x l'aire de ABC





Pour la première question, on utilise les égalités de deux longueurs et d'un angle entre les deux pour démontrer l'isométrie des triangles. Cela permet de démontrer l'égalité des longueurs homologues MN, NP et PM, donc MNP est un triangle équilatéral, semblable au triangle équilatéral ABC (ils ont en effet les mêmes angles).

La question sur la nature de MPN paraît ici mal placée, puisque nous avons déjà utilisé qu'il s'agissait d'un triangle équilatéral pour montrer la similitude (on n'aurait certainement pas pu montrer celle-ci autrement ici).

Pour démontrer la similitude de deux figures aussi particulières (triangles équilatéraux ou isocèles-rectangles), il semble que les cas de similitude ne soient pas indispensables. Nous verrons cela plus loin dans notre analyse des exercices de manuels au chapitre 7.

Pour répondre à la deuxième question, on utilise l'astuce suivante : tous les triangles constituant MNP (découpage mis en évidence par les couleurs sur le dessin) ont la même aire, car ils ont deux à deux la même base et une hauteur commune.

Il ne faut pas utiliser P2 ici, car on ne sait pas calculer le rapport de similitude, mais on aurait pu justement le déduire de la comparaison des aires.

- - 10ème séance (aide individualisée) (non filmée)

exercice 1AI3 : *ABC et DEF de même forme tels que ED / AB = EF / AC = DF / BC* *citer trois égalités d'angles*

Il suffit ici de reconnaître les homologues et de les associer en utilisant les rapports de longueurs donnés (A et E, B et D, C et F), les noms des triangles étant donnés dans le désordre, puis d'utiliser P'1 pour conclure à la similitude et aux angles égaux

exercice 2 AI3: *les côtés d'un triangle T ont pour longueurs 6, 8 et 9 cm, un triangle T' de même forme a des côtés de longueurs 9 et 13.5 cm* *calculer la longueur du 3ème côté de T'*

Il suffit ici de reconnaître les côtés homologues en associant le plus grand avec le plus grand, le moyen avec le moyen et le petit avec le petit. Il faut aussi que les rapports des quatre premiers côtés homologues connus soit égaux. Il faut donc ici essayer toutes les possibilités, car on ne sait pas comment classer les deux côtés déjà connus du triangle T' par rapport au côté manquant.

On calcule le 3ème côté par proportionnalité (P1) dans tous les cas possibles :

pour 6 / 8 / 9 et x / 9 / 13,5 on vérifie que 8 / 9 et 9 / 13,5 ne sont pas égaux, donc c'est impossible

pour 6 / 8 / 9 et 9 / 13,5 / z on vérifie que 6 / 9 et 8 / 13,5 ne sont pas égaux, donc c'est impossible pour 6 / 8 / 9 et 9 / y / 13,5 on vérifie que 6 / 9 et 9 / 13, 5 sont égaux, et on calcule le côté manquant (le moyen) : y = 8 x 9 / 6 = 12

On vérifie ensuite que le résultat numérique trouvé est cohérent géométriquement, en particulier que la longueur du côté trouvé est bien comprise entre les longueurs des deux autres côtés, et que la somme des longueurs des deux plus petits côtés est bien supérieure à la longueur du plus grand (inégalité triangulaire)

exercice 3 AI3:
les côtés d'un triangle T ont pour longueurs 15, 18 et 21 cm, un triangle T' de même forme a un côté de longueur 15cm
quelles peuvent être les longueurs des autres côtés de T' ?

Il s'agit du même type de tâche que précédemment, mais cette fois-ci, il y a plus de possibilités pour associer les côtés des deux triangles semblables, car moins de contraintes. On ne sait pas si le seul côté connu du triangle T' est le plus petit, le moyen ou le plus grand. On envisage donc toutes les possibilités, en associant le côté connu de T' successivement avec les trois côtés de T, puis en appliquant P1 et en calculant les deux côtés manquants à l'aide des produits en croix. :

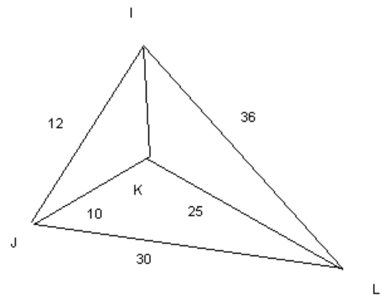
15 / 18 / 21 et 15 / x / y nous donne deux triangles isométriques, donc avec des côtés de même longueur

15 / 18 / 21 et u / 15 / v nous donne le petit côté de T' de 12,5 cm et le grand de 17,5 cm

15 / 18 / 21 et z / t / 15 nous donne le petit côté de T' de 10, 8 cm environ et le moyen de 12,9 cm environ

On vérifie la cohérence de ces résultats.

exercice 4 AI3 :
a) utiliser les informations de la figure pour montrer que IJL et JKL sont de même forme
b) préciser les angles de même mesure de ces triangles



Pour la première question il suffit d'associer les côtés des deux triangles en fonction de leur ordre de grandeur, puis de constater que les rapports obtenus sont égaux, ce qui nous donne la similitude grâce à P'1. Ensuite il suffit d'associer les sommets homologues – trouvés grâce aux côtés homologues – pour obtenir les angles égaux.

Dans ces quatre exercices d'aide individualisée, les tâches prescrites concernent en particulier le repérage des sommets homologues – à l'aide des longueurs des côtés ou des rapports de longueurs. On peut donc imaginer qu'il s'agit d'une difficulté repérée chez certains élèves par le professeur, qui propose alors ici des exercices qui font travailler ce type de tâche, peu travaillé en classe.

c) Déroulement

Lors des séances de cours en classe entière de Mme P. sur les triangles semblables, celle-ci parle beaucoup, mais les élèves bénéficient aussi de longs temps de recherche pendant lesquels le professeur se tait. Les élèves participent à la résolution pendant les séances d'exercices, la correction est faite au tableau par un élève, sous le contrôle du professeur, ou bien par le professeur lui-même, mais sous la dictée d'un ou plusieurs élèves. Les autres solutions possibles, proposées par d'autres élèves, sont prises en compte. Le professeur donne des exercices à faire à la maison à chaque séance.

Les séances de module sont en partie préparées à la maison, mais il y a aussi des exercices donnés pendant la séance et pour lesquels les élèves bénéficient d'un long temps de recherche. Les élèves travaillent individuellement, et non en groupe, le professeur passe dans les rangs et répond à leurs questions, parfois à voix haute pour que toute la classe en profite.

Pour les séances d'aide individualisée, nous ne bénéficions que d'une seule vidéo, mais le professeur nous a confirmé que l'organisation en était toujours la même. Les élèves qui y assistent sont volontaires ou choisis parmi ceux qui ont eu une mauvaise note au dernier contrôle. En début de séance, le professeur interroge les élèves sur leurs difficultés, puis une feuille d'exercices est distribuée aux élèves. Les élèves cherchent individuellement, le professeur répond à leurs questions en passant dans les rangs, puis la correction se fait au tableau. Le temps de recherche laissé aux élèves est sensiblement moins long que pour les exercices de module.

Il y a trois devoirs notés sur ce chapitre : un devoir à la maison, un premier contrôle, puis un deuxième, quelques temps plus tard, et qui porte aussi sur d'autres chapitres. Les copies des élèves nous ont été remises pour chacun de ces trois devoirs.

d) Bilan des tâches en classe et à la maison

Nous avons dressé le tableau suivant, synthétisant le bilan de toutes les tâches proposées en classe et de leur déroulement. Nous avons mis en gris les dernières tâches du chapitre, proposées en fait après le premier contrôle, et qui ne préparaient donc éventuellement qu'au deuxième contrôle.

ex	Conf	Connaissances		Niveau de mise en fonctionnement	Déroulement			
		Anciennes	**Nv**		**Tps silence**	**Aides du professeur**		
						Nature	**Moment**	**Forme**
dém	2 Δ	Thalès, isométrie	D'1	introduction d'étapes	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	questions fermées
1	2 Δ	construction	D'1	introduction d'étapes	7 min 20	méthode	au milieu et à la fin	questions ouvertes et aides individ.
2	2 Δ emboîtés		D'1 puis P1	introduction d'étapes (démontrer la similitude) calcul d'intermédiaires (reconnaissance des homologues)	8 min 10	méthode	au milieu et à la fin	consigne : trouver les triangles semblables questions ouvertes
3	cercle	angle inscrit	D'1 puis P1	introduction d'étapes (démontrer la similitude)	**préparé à la maison** + 3 min	méthode	tout de suite puis du début jusqu'à la fin	**module** consigne : prendre des cordes particulières aides individuelles
4	2 Δrect	égalités d'angles	D'1 puis P1	introduction d'étapes (démontrer la similitude)	**préparé à la maison**	méthode	pendant la correction	**module** questions plus ou moins ouvertes
vrai-faux		triangles particuliers somme angles	D'1 ou P1	reconnaissance des modalités d'application	17 min 40	méthode	pendant la correction	**module** conseils
AI1	2 Δ	périmètre	P1	reconnaissance des modalités d'application	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	**aide individualisée** questions fermées
AI2	cercle	angle inscrit	D'1 puis P1	calcul d'intermédiaires (reconnaissance des homologues)	3 min 10	méthode	après le début	**aide individualisée** indication : angles égaux de même couleur sur la figure au tableau
5	2 Δrect emboîtés		D'1 puis P1	calcul d'intermédiaires (reconnaissance des homologues)	**préparé à la maison**	méthode	pendant la correction du début à la fin	questions ouvertes
6	2 Δ	Isométrie Thalès (théorème et réciproque) égalités d'angles	D'1 puis P1	introduction d'étapes (construction d'un triangle isométrique au petit, démo de l'isométrie, parallélisme)	**préparé à la maison**	méthode	du début jusqu'à la fin	questions fermées
61 p216	2 Δrect	géométrie analytique, racines, trigo	P'1	calcul d'intermédiaires (longueurs des côtés)	**préparé à la maison**	méthode	du début jusqu'à la fin	**module** questions fermées non math
7	2 Δ	triangles particuliers égalité d'angles	D'1	calcul d'intermédiaires (démo isocèles)	**préparé à la maison** + 1 min	méthode	après début	**module** rappels de cours
			P2		3 min 40	méthode	après temps de recherche	**module** rappel de cours
65 p216	Thalès		P3 puis P2	reconnaissance des modalités d'application	**préparé à la maison**	homologues méthode	du début jusqu'à la fin	rappels de cours
77 p217	2 Δrect emboîtés	calculs d'angles	P2	introduction d'étapes (démontrer la similitude)	**préparé à la maison**	homologues méthode	du début jusqu'à la fin	codage figure, questions fermées,
PB	2 Δ	Pythagore racines	P2	Choix, introduction d'étapes (construction)	**préparé à la maison** + 10 min			
1 (2)	cercle	triangle rectangle et cercle	D'1 puis P1	calcul d'intermédiaires (égalité du 2ème angle)	10 min 10	homologues méthode	après temps de recherche	**module** rappel de cours
EX en +	2 Δrect emb	trigo	P3	calcul d'intermédiaires (longueurs de deux côtés)	non filmé indication avant : utiliser le cosinus			
2 (2)	//gramme	égalités d'angles, algèbre(après)	D'1 puis P1	reconnaissance des modalités d'application	non filmé			
m3	2 Δ	Isométrie, médiane et aire d'un triangle	P'1 puis P2	introduction d'étapes	Séance de module, non filmé			
AI 3 4ex	2 Δ		P'1	calcul d'intermédiaires (reconnaissance des homologues)	Séance d'aide individualisée, non filmé			

De ce premier tableau ci-dessous, nous pouvons déjà tirer quelques remarques.

- la difficulté des tâches

Les niveaux de mise en fonctionnement sollicités sont surtout l'introduction d'étapes (8 fois) et le calcul d'intermédiaires (8 fois). Le niveau le plus complexe - selon nous – n'est pas travaillé, sauf dans le cas du Problème d'Euclide, noté "PB" dans le tableau et donné à préparer à la maison, et où les élèves doivent faire des choix. Des connaissances anciennes sont associées aux connaissances nouvelles dans la plupart des exercices.

Les exercices donnés en aide individualisée sont plus simples que ceux abordés en classe, et ils permettent en particulier aux élèves de s'entraîner au repérage des sommets homologues, tâche qui semble poser une difficulté à certains élèves.

- les répétitions, la variété, la progression des tâches et applications proposées

Toutes les propriétés nouvelles du cours ont été travaillées, certaines plus que d'autres : en particulier les propriétés D'1 et P1, et la combinaison des deux D'1 + P1, représentent 14 applications sur les 19 proposées. Les tâches les plus complexes sont réparties sur l'ensemble du chapitre, et en particulier les cinq premiers exercices donnés aux élèves font partie des plus difficiles (introduction d'étapes) parmi tous ceux proposés.

- le travail à la maison

Beaucoup d'exercices abordés en classe ont été préparés à la maison, et pas seulement à travers des "gammes", mais aussi avec des exercices qui nécessitent des adaptations plus complexes, qui sont ensuite corrigés en classe.

- le type de travail en classe et les aides apportées par le professeur

Les élèves travaillent individuellement, en classe, en module et en aide individualisée, le professeur ayant choisi de pas les faire travailler en groupe. Les aides du professeur interviennent souvent après un temps de recherche pour les élèves, elles portent essentiellement sur la méthode à adopter, parfois sur le repérage des homologues, et sont plus ou moins directives pour les élèves selon les cas.

- le traitement de la notion

Le professeur a choisi ici d'introduire la notion nouvelle à l'aide d'un problème à résoudre, problème qu'il reprend et prolonge pour introduire les différentes propriétés.

Aucun discours ni méthode ne sont donnés dans ce chapitre sur le travail de repérage des homologues. Ceux-ci ne sont généralement pas signalés ni même écrits dans l'ordre dans les énoncés, mais sont parfois pris en charge par le professeur lors de la résolution des exercices, nous verrons plus loin avec quelle fréquence.

Sur les 17 exercices proposés en classe ou en demi-classe, 11 font travailler les élèves sur l'objet triangles semblables, et dans les 6 autres la similitude est un outil qui permet de calculer des grandeurs dans les figures géométriques. De plus, dans ces 6 exercices, la similitude n'est pas mentionnée, et les élèves doivent mobiliser cet outil d'eux-mêmes. La notion doit donc être disponible pour les élèves, même si le fait d'être en plein chapitre sur les triangles semblables peut pousser les élèves à utiliser cette notion de toutes façons.

Comme précédemment, nous avons dressé le tableau de ce qui reste à faire aux élèves lors des séances d'exercices en classe.

D'après ce deuxième tableau (voir page suivante), les élèves ont beaucoup travaillé l'application de D'1 puis P1, alors que ces propriétés étaient les seules vues dans le cours (les 9 premières applications).

Le repérage des homologues est pris en charge le plus souvent par le professeur (11 fois sur 15[61]).

Les élèves disposent de temps de recherche sur la méthode, même s'ils ont aussi à réaliser beaucoup d'applications simples et isolées.

[61] Il y a moins d'exercices dans ce tableau, car nous n'avons pris en compte que les tâches dont les activités figuraient sur nos vidéos. Pour les autres, il nous est difficile de faire cette analyse.

ex	type de tâche a priori : ASI ou adaptation	ce que l'élève cherche tout seul en classe	ce que l'élève fait tout seul en classe	connaissances nvelles	repérage des homologues en classe	prise en charge ancien/nouveau en classe
dém	introduction d'étapes		construction			prof (Thalès)
1	introduction d'étapes	méthode (5min40) avec indications	construction	D'1	prof (énoncé)	
2	introduction d'étapes	méthode (8min10) avec indications	numérique	D'1 et P1	prof	élèves (numérique après)
3 **module maison**	introduction d'étapes	méthode (3 min) avec indication	ASI	D'1 et P1	élèves	élève (angle inscrit) prof (calcul algébrique d'angles)
4 **module maison**	introduction d'étapes		ASI	D'1 et P1	prof	élèves (calcul d'angles)
vrai/faux **module**	reconnaissance des modalités	démo ou contre-exemple	ASI	D'1 et P1	élèves	élèves (triangles particuliers)
AI1	reconnaissance des modalités		ASI	D'1 et P1	prof	élèves (périmètre)
AI2	calcul d'intermédiaires	méthode (3 min 10)	ASI	D'1 et P1	prof (codage des angles)	élèves (angle inscrit)
5 **maison**	calcul d'intermédiaires		construction	D'1 et P1	prof	
6 **maison**	introduction d'étapes		ASI	D'1 et P1	élèves	prof (isométrie, Thalès, angles)
61p216 **module maison**	calcul d'intermédiaires		ASI	D'1, P1, P'1, P2, (P3)	prof	prof (géométrie analytique, racines, trigo, calculs d'angles)
7 **module maison**	calcul d'intermédiaires	méthode (1 min)	ASI	D'1, P1, P'1, P2, (P3)	prof	prof (angles correspondants)
1(2)	calcul d'intermédiaires	méthode (10min10)	recherche puis ASI	D'1, P1, P'1, P2, (P3)	prof	prof (triangle rectangle et cercle, racines)
65p216 **maison**	reconnaissance des modalités		ASI	D'1, P1, P'1, P2, (P3)	prof	prof (proportionnalité et pourcentage)
77p217 **maison**	introduction d'étapes		ASI	D'1, P1, P'1, P2, P3	prof	élève (trigo)
PB **maison**	introduction d'étapes	calculs (10min)	numérique	D'1, P1, P'1, P2, P3	élèves	prof (racines) élève (Pythagore)

Nous regardons aussi comment les interventions de ce professeur redéfinissent les tâches mathématiques données aux élèves, afin de voir quelles sont les tâches auxquelles ils ont pu réellement être confrontés, et de caractériser le type de travail proposé par ce professeur en classe sur ce chapitre.

Voilà un exemple, à partir des activités découlant de l'exercice 1, de la façon dont le professeur fait travailler en classe les élèves : en partant d'un énoncé relativement complexe (ici avec la nécessité d'introduire des étapes), sur lequel les élèves disposent d'un temps de recherche individuelle, le découpage des tâches se fait progressivement, et les élèves ont tout de même l'occasion de travailler seuls et assez longtemps (ici 13 min 40 au total) sur des sous-tâches non simples et non isolées. La correction finale est collective.

1 min 20	consignes : comment travailler aide méthode : rappel sur les outils disponibles
1 min 20	les élèves cherchent seuls NMF : introduction d'étapes
0 min 30	aide méthode: ne pas utiliser la propriété sur les longueurs
9 min 30	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités (il ne reste qu'une seule méthode possible : l'utilisation de D1)
0 min 10	aide méthode: regardez dans votre cours
1 min	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	relance
1 min 50	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	relance
1 min 20	les élèves cherchent seuls NMF : reconnaissance des modalités
0 min 10	aide méthode: rappel de la propriété D'1 à utiliser
5 min 10	le prof interroge les élèves les élèves font des ASI avec le prof et copient

Les autres tableaux que nous avons construits pour chaque exercice traité en classe se trouvent en annexe[62], et ressemblent beaucoup à celui-ci, dans leur structure et leur évolution au cours des exercices.

Toutes ces analyses nous permettent de constater la très grande stabilité des pratiques pour un même professeur, en ce qui concerne la gestion des activités des élèves en classe, sur un chapitre donné.

Nous allons maintenant donner les énoncés et l'analyse des tâches des contrôles et du devoir, afin de pouvoir les comparer à ce qui a été fait en classe, et interpréter par la suite les résultats des élèves.

[62] Voir ANNEXES : analyse des activités tâche par tâches chez Mme P.

e) Analyse des tâches du devoir à la maison et des contrôles

Voilà une analyse des tâches données au premier contrôle, à la fin du chapitre sur les triangles semblables :

exercice 1 :

ABC est un triangle, on note S son aire, O et R le centre et le rayon de son cercle circonscrit. La droite (OA) recoupe le cercle en D, la hauteur issue de A du triangle ABC coupe (BC) en H

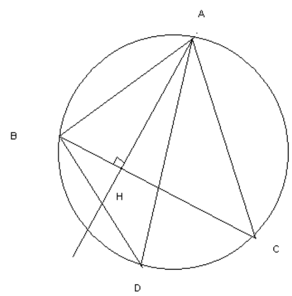
1) démontrer que AHC et ABD sont semblables

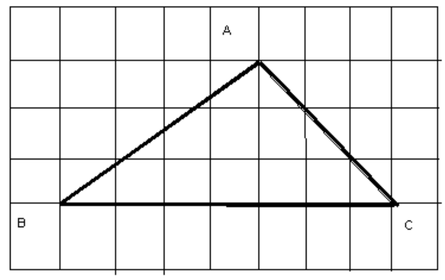
2) en déduire que AB x AC x BC = 4 x S x R

3) application (chaque petit carré a pour côté 1)

a) déterminer les longueurs des côtés de ABC (valeurs exactes) ainsi que son aire

b) en utilisant 2), calculer R (valeur exacte puis valeur approchée à 0.1 près) ; tracer le cercle et expliquer comment vérifier graphiquement le résultat.

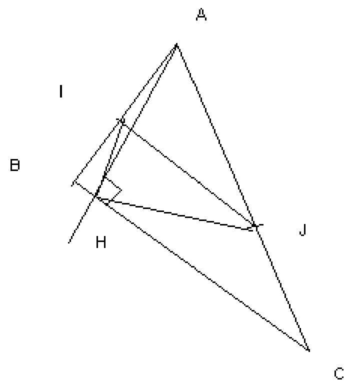




On utilise D'1 et deux égalités d'angles pour démontrer la similitude : D et C sont des angles inscrits, et B et H sont des angles droits (triangle inscrit dans un demi-cercle). Les noms des triangles sont ici donnés dans le bon ordre. On applique ensuite P1 pour écrire les rapports de longueurs, puis l'égalité demandée en les combinant, ce qui n'est pas simple, car pour la première fois les élèves doivent combiner trois produits et non plus seulement deux. Ce type de tâche est assez fréquent : 11 applications de D'1 + P1 pour exprimer ou calculer des longueurs, dont deux fois sous forme d'égalités de produits – une seule fois en classe entière. Mais le fait de devoir pour une fois combiner les trois rapports de longueurs peut poser un problème aux élèves. Nous verrons ce qu'il en est en regardant les résultats qu'ils ont obtenus au contrôle pour ce premier exercice.

Pour l'application de la question 3), on complète le schéma et on calcule les longueurs à l'aide de Pythagore, puis l'aire à l'aide des longueurs. On en déduit R à l'aide de l'égalité du 2).

exercice 2 :
ABC est un triangle quelconque (avec B et c aigus), on note I le milieu de [AB] et J celui de [AC], la hauteur issue de A coupe (BC) en H.
1) démontrer que IH=1/2 AB
2) démontrer que IJH et ABC sont semblables, en déduire que les angles IHJ et BAC sont égaux
3) démontrer que [IJ) est la bissectrice de AI4) si l'aire du triangle ABC est égale à 12cm², quelle est l'aire de IJH ?



Pour répondre à la première question, on utilise la propriété de la médiane issue de l'angle droit dans le triangle rectangle, dont la longueur du segment est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse. Ensuite on utilise la même démonstration – sans que cela soit suggéré par l'énoncé – pour exprimer d'autres rapports de longueurs, ce qui nous donne : JH=1/2AC et la propriété de la "droite des milieux" qui nous donne : IJ=1/2BC. Les deux triangles ont alors leurs trois côtés proportionnels donc d'après P'1 ils sont semblables, et d'après la définition leurs angles sont égaux deux à deux. Les noms des triangles sont ici écrits dans le désordre.

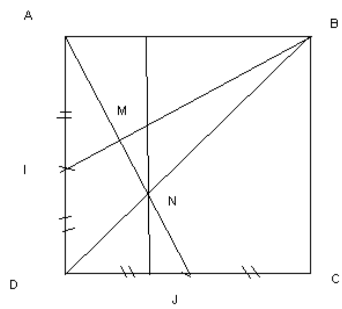
Ici la tentation pourrait être grande de démontrer les égalités des rapports de longueurs à l'aide de la similitude de deux triangles (et non à l'aide d'autres propriétés) car c'est ce que les élèves ont fait 11 fois au cours des exercices du chapitre. On peut prévoir que certains élèves risquent de ne pas penser à démontrer cette question sans utiliser les triangles semblables.

Les points I et J sont équidistants de A et H donc (IJ) est la médiatrice de [AH], c'est aussi la bissectrice de l'angle I car AIH est isocèle. L'aire de IJH est égale à ¼ de l'aire de ABC, en utilisant le rapport de similitude et la propriété P2.

Les deux exercices de ce premier contrôle sont assez complexes, non pas parce que le niveau de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles est élevé (au "pire" : calcul d'intermédiaires), mais parce que beaucoup d'autres connaissances plus anciennes interviennent (algèbre, propriétés des triangles particuliers). Le découpage des questions permet un travail sur l'objet triangles semblables plutôt que sur des problèmes qu'il est possible de résoudre à l'aide de la similitude.

Voilà maintenant l'analyse des deux exercices donnés à faire en devoir à la maison :

exercice 1 :
ABCD est un carré de côté 6cm, on note J le milieu de [DC] et N le point d'intersection de (AJ) et (BD)
1) calculer l'aire de ADJ
2) calculer l'aire de NDJ (on pourra utiliser les hauteurs issues de N dans NAB et NDJ)
3) on note I le milieu de [AD], la droite (BI) coupe (AJ) en M, démontrer que ADJ et AIB sont isométriques puis que ADJ et AIM sont de même forme
4) démontrer que (AJ) et (BI) sont perpendiculaires
5) calculer l'aire de MIDN



1) On calcule l'aire de ADJ en effectuant ADXDJ / 2 = 9.

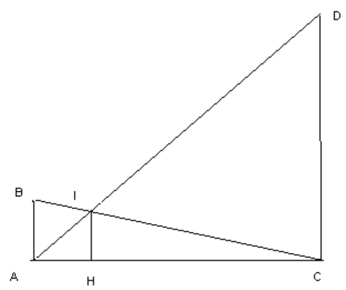
2) On montre ensuite la similitude des triangles ABN et NDJ à l'aide de D'1 (angles alternes internes et angles opposés par le sommet) pour déduire le coefficient de similitude avec P'1, puis la hauteur (les hauteurs sont dans le même rapport) à l'aide d'une résolution d'équation. On obtient ainsi l'aire en appliquant la formule. Ici l'utilisation de la similitude de deux triangles n'est pas suggérée par l'énoncé, et doit donc être mobilisée par les élèves sans que cela leur soit indiqué.

3) Les triangles sont isométriques car ils ont un angle égal (90°) entre deux côtés respectivement égaux, ils ont donc leurs trois angles égaux, donc AIM et ADJ qui ont deux angles de même mesure sont semblables.

4) De la question précédente on déduit que les angles AMI et ADJ étant égaux, on a AMI = 90°.

5) On calcule le rapport de similitude entre ADJ et AMI pour connaître l'aire de ADJ en utilisant P2 et le fait que : aire(MIDN) = aire (ADJ) – aire(AIM) – aire (NDJ).

exercice 2 : *deux règles de 4cm et de 12 cm sont placées verticalement sur un plan horizontal, chaque règle est reliée à l'autre par un élastique qui joint son sommet au pied de l'autre. On cherche à savoir à quelle hauteur se croisent les élastiques et comment varie cette hauteur lorsqu'on déplace les règles.* *1) calculer IC en fonction de BC* *2) trouver alors IH et conclure*



Dans cet exercice, la similitude des triangles est un outil qui permet de résoudre un problème concret – du moins matérialisé par une situation concrète.

On démontre à l'aide de D'1 que IAB et IDC sont semblables, bien que cela ne soit pas indiqué dans l'énoncé, pour pouvoir exprimer le rapport des côtés (application de P1) et obtenir, après résolution algébrique, IC=3/4 BC.

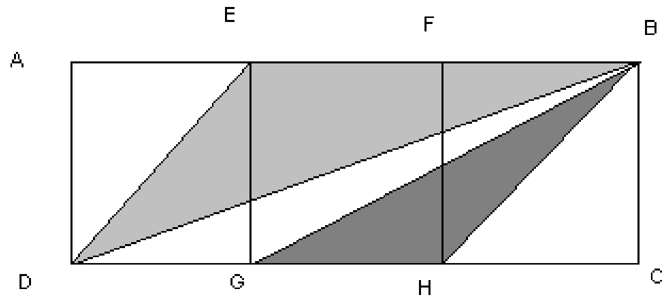
On applique ensuite la propriété de Thalès dans le triangle ABC et on obtient, en utilisant aussi l'égalité précédente, IH=3.

Donc la hauteur est constante.

Dans ces deux exercices à faire à la maison, on trouve des applications de la similitude – utilisation non signalée par l'énoncé – permettant de calculer des longueurs.

Voici maintenant l'exercice sur les triangles semblables donné dans le deuxième contrôle, longtemps après la fin du chapitre, parmi des exercices sur d'autres notions. Il s'agissait ici du premier exercice du contrôle, ce qui explique certainement en partie qu'il ait été traité par presque tous les élèves :

exercice : *sur la figure, AEGD, EFGH et FBCH sont des carrés* *1) démontrer que EDB et HGB sont semblables* *2) démontrer que mes (BDC) + mes (BGC) = mes (BHC)* *(on pourra choisir la longueur AE comme unité, c'est à dire poser AE = 1)*



Les triangles ont trois côtés proportionnels : il suffit d'exprimer chaque côté en fonction du côté a du carré en utilisant la propriété de Pythagore :

EB = 2, ED = $\sqrt{2}$ et BD = $\sqrt{10}$ et d'autre part BH = $\sqrt{2}$, GH = 1, et BG = $\sqrt{5}$

Puis il faut calculer les rapports de longueurs, et de montrer leur égalité, en les associant correctement (ici cela revient à classer les longueurs des côtés pour chaque triangle) : $2 / \sqrt{2} = \sqrt{2} = \sqrt{10} / \sqrt{5}$. Donc d'après P'1 les triangles sont semblables. Les noms des triangles sont donnés ici dans le bon ordre.

Il y a une autre méthode possible : les triangles EDB et HGB ont un angle égal (135°) entre deux côtés proportionnels (toujours d'après les calculs précédents), donc d'après P3 ils sont semblables. Ensuite BDC + BGC = EBD (alternes internes) + EDB (angles homologues)

= 180° - BED = 180° - 35° = 45° = BHC

f) Bilan des tâches des trois devoirs

ex	Conf	Connaissances qui fonctionnent		Niveau de mise en fonctionnement
		Anciennes	**Nouvelles**	
contrôle 1				
1 1)	cercle, triangles emboîtés	angle inscrit, triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle (avant)	D'1	calcul d'intermédiaires
1 2)	cercle, triangles emboîtés	algèbre (après)	P1	reconnaissance des modalités
2 2)	triangles emboîtés	triangles particuliers, droite des milieux (avant)	P'1	calcul d'intermédiaires
2 4)	triangles emboîtés		P2	reconnaissance des modalités
devoir maison				
1 2)	Thalès	égalités d'angles (avant), algèbre (après)	D'1 puis P1	introduction d'étapes
1 3)	triangles emboîtés	isométrie (avant)	D'1	reconnaissance des modalités
1 5)	triangles emboîtés		P2	reconnaissance des modalités
2 1)	triangles emboîtés	égalité d'angles (avant), algèbre (après)	D'1 puis P1	introduction d'étapes
contrôle 2				
1 1)	triangles et //gramme	Pythagore	P'1 ou P3	calcul d'intermédiaires

g) Résultats des élèves

Nous donnons les résultats des élèves aux trois devoirs[63]. Nous avons précisé les élèves qui ont assisté aux séances d'aide individualisée (AI 1 ou 2) et ceux qui prennent des cours particuliers ou sont aidés par un membre de leur famille (CP et fréquence).

[63] Nous avons cette fois encore utilisé des cases foncées pour les réponses correctes, et plus claires pour les réponses fausses. Ces couleurs facilitent la comparaison entre les élèves, et le classement qui suivra entre "bons" et "mauvais", et mettent en évidence les questions qui ont été réussies par le plus grand nombre d'élèves

DEVOIR	Ex 1 2)	Ex1 3)	Ex1 5)	Ex 2 1)	notes
connaissance nouvelle	**D'1 puis P1**	**D'1**	**P2**	**D'1 puis P1**	
NMF	étapes	reconnaissance	reconnaissance	étapes	
connaissances anciennes	angles, algèbre	isométrie		angles, algèbre	
tiffany	b	b	b	b	4
juliette	b	b	b	b	4
marine	b	(b) (trop hypothèses)	b	(b) (trop hypothèses)	4
jean michel (AI 2)	b	b	b	b	4
aurore	b	b	(b) (compliqué)	b	4
denis	b	b	b	b	4
léa	b	b	b	b	4
emmanuelle	b	b	b	b	4
axelle	(b) (compliqué)	b	b	b	4
laurent	f	b	x	f (thalès)	2
anaîs (CP ponctuel, AI 1, 2)	b	b	b	b	4
malika	b	b	b	b	4
l.g. (CP père, AI 1, 2)	(b) (à justifier)	b	b	b	4
nathaniel	b	b	b	b	4
paul	b	b	b	b	4
geoffrey	b	b	b	b	4
panagiotis	b	b	b	b	4
anthony	b	b	b	b	4
alain (AI 2)	b	b	b	b	4
jamila	b	b	b	b	4
geoffroy	b	b	b	b	4
diana	b	b	b	b	4
mathieu (CP régulier AI 1)	b	b	b	b	4
yannick	(abs)				
guillaume (CP ponctuel, AI 1, 2)	b	b	b	b	4
maxime (CP; AI 1)	b	b	(b) (non justifié)	b	4
ariel	b	b	b	b	4
tiphaine (CP ponctuel, AI 1)	b	b	b	b	4
olivia	b	b	b	b	4
alban	b	b	b	b	4
julien	b	b	b	b	4
violaine (CP régulier, AI 1, 2)	b	b	(b) (numérique)	(b) (numérique)	4
allison	(b) (compliqué)	(b) (compliqué)	(b) (compliqué)	b	4
amirouche	f (inachevé)	b	b	x	2
marion (AI 2)	b	b	b	b	4
total : 34 présents	**32/34**	**34/34**	**33/33**	**32/33**	

CONTROLE 1	Ex 1 1)	Ex 1 2)	Ex 2 2)	Ex 2 4)	notes
connaissance nouvelle	**D'1**	**P1**	**P'1**	**P2**	
NMF	intermédiaires	reconnaissance	intermédiaires	reconnaissance	
connaissances anciennes	angle inscrit, triangle rectangle et cercle	algèbre	droite des milieux; médiane du tr rectangle		
tiffany	b	f (inachevé)	b	b	3
juliette	b	x	f (D'1)	(b) (non justifié)	2
marine	b	x	b	b	3
jean michel (AI 2)	b	f	b	(b) (non justifié)	3
aurore	b	b	x	b	3
denis	b	x	f (inachevé)	(b) (long)	2
léa	b	f (inachevé)	b	b	3
emmanuelle	b	b	b (P3)	b	4
axelle	b	f (inachevé)	b (D'1)	f	2
laurent	b	x	x	b	2
anaîs (CP ponctuel, AI 1, 2)	b	f (inachevé)	x	x	1
malika	b	f (inachevé)	b	x	2
l.g. (CP père, AI 1, 2)	b	x	b (P3)	b	3
nathaniel	b	f (algèbre)	(b) (D'1 compliqué)	b	3
paul	b	b	b	b	4
geoffrey	b	b	b	b	4
panagiotis	b	x	b	b	3
anthony	b	b	f	b	3
alain (AI 2)	b	b	f (géométrie)	f (numérique)	2
jamila	b	x	b	b	3
geoffroy	b	f	(b) (D'1 compliqué)	b	3
diana	b	x	(b) (non justifié)	b	3
mathieu (CP régulier AI 1)	b	x	f	f (inachevé)	1
yannick	f (inachevé)	x	b	b	2
guillaume (CP ponctuel, AI 1)	b	f (inachevé)	x	x	1
maxime (CP; AI 1)	b	f(inachevé)	b	b	3
ariel	b	b	b	b	4
tiphaine (CP ponctuel, AI 1)	b	f (inachevé)	f (inachevé)	f (numérique)	1
olivia	b	b	b	b	4
alban	b	b	b	b	4
julien	b	f (inachevé)	b	b	3
violaine (CP régulier, AI 1, 2)	b	f (inachevé)	(b) (D'1 compliqué)	f (numérique)	2
allison	b	f(inachevé)	(b) (P3 compliqué)	b	3
amirouche	(abs)				
marion (AI 2)	(abs)				
total : 33 présents	**32/33**	**9/23**	**23/29**	**25/30**	

CONTROLE 2	Ex 1 1)	Notes sur 1
connaissance nouvelle	**P'1 ou P3**	
NMF	calcul d'intermédiaires	
connaissances anciennes	Pythagore	
tiffany	f (manque une hypothèse)	0
juliette	f (manquent des hypothèses)	0
marine	f (théorème)	0
jean michel (AI 2)	f (numérique)	0
aurore	b (P3)	1
denis	f (inachevé)	0
léa	x	0
emmanuelle	b (P3)	1
axelle	f (manque une hypothèse)	0
laurent	f (manque une hypothèse)	0
anaîs (CP ponctuel, AI 1,2)	b (P3)	1
malika	b (P3)	1
l.g. (CP père, AI 1, 2)	b (P3)	1
nathaniel	b (P3)	1
paul	b (P3)	1
geoffrey	b (P3)	1
panagiotis	b (P'1)	1
anthony	b (P'1)	1
alain (AI 2)	f (théorème)	0
jamila	b (P3)	1
geoffroy	b (P3)	1
diana	b (P3)	1
mathieu (CP régulier AI 1)	f (numérique)	0
yannick (AI 2)	f (inachevé)	0
guillaume (CP ponctuel, AI 1)	f (manque une hypothèse)	0
maxime (CP; AI 1)	f (pas de théorème)	0
ariel	b (P3)	1
tiphaine (CP ponctuel, AI 1)	f (manque une hypothèse)	0
olivia	b (P3)	1
alban	f (numérique)	0
julien	b (P3)	1
violaine (CP régulier, AI 1, 2)	f (théorème)	0
allison	b (P3)	1
amirouche	x	0
marion (AI 2)	(abs)	
total : 34 présents	**17/32**	

Pour pouvoir tirer parti des résultats des élèves au contrôle, nous avons essayé à nouveau de les classer suivant les trois notes obtenues.

Bilan des trois notes	Contrôle 1 Note sur 4	Devoir Note sur 4	Contrôle 2 Note sur 1	Notre classement	Orientation pour la 1ère
tiffany	3	4	0	bon	S
juliette	2	4	0	mauvais	ES
marine	3	4	0	bon	S
jean michel (AI 2)	3	4	0	bon	redoublement
aurore	3	4	1	bon	S
denis	2	4	0	mauvais	S
léa	3	4	0	bon	S
emmanuelle	4	4	1	bon	S
axelle	2	2	0	mauvais	ES
laurent	2	4	0	mauvais	S
anaîs (CP ponctuel, AI 1,2)	1	4	1	mauvais	ES
malika	2	4	1	bon	S
l.g. (CP père, AI 1, 2)	3	4	1	bon	ES
nathaniel	3	4	1	bon	S
paul	4	4	1	bon	S
geoffrey	4	4	1	bon	S
panagiotis	3	4	1	bon	S
anthony	3	4	1	bon	S
alain (AI 2)	2	4	0	mauvais	S
jamila	3	4	1	bon	S
geoffroy	3	4	1	bon	S
diana	3	4	1	bon	S
mathieu (CP régulier AI 1)	1	4	0	mauvais	S
yannick (AI 2)	2	abs	0	mauvais	redoublement
guillaume (CP ponctuel, AI 1)	1	4	0	mauvais	S
maxime (CP; AI 1)	3	4	0	bon	redoublement
ariel	4	4	1	bon	S
tiphaine (CP ponctuel, AI 1)	1	4	0	mauvais	S
olivia	4	4	1	bon	S
alban	4	4	0	bon	S
julien	3	4	1	bon	S
violaine (CP régulier, AI 1, 2)	2	4	0	mauvais	redoublement
allison	3	4	1	bon	S
amirouche	abs	2	0	mauvais	S
marion (AI 2)	abs	4	abs	?	ES

Ici, la note du devoir semble cependant peu significative, car tous les élèves - à deux exceptions près et un absent - en ont réussi toutes les questions.

Nous avons donc classés comme "bons" ceux qui avaient réussi les deux contrôles, et comme "mauvais" ceux qui les avaient tous deux ratés. Nous avons donc créé une nouvelle catégorie "moyens", pour tenir compte des autres élèves.

En fait, le contrôle 2 a été posé une dizaine de jours après la fin du chapitre sur les triangles semblables, et après l'interruption des vacances scolaires, et portait aussi sur d'autres connaissances. Heureusement pour nous, l'exercice portant sur les triangles semblables était le premier, et les élèves l'ont donc presque tous traité. Cela nous permet de mesurer ce qu'il en est de leurs apprentissages sur cette notion après une période de quelques temps.

Il y a des élèves qui ont réussi le premier contrôle, tout de suite après la fin du chapitre, et qui ont échoué au deuxième, quelques temps plus tard. Mais il y a aussi des élèves qui ont échoué au premier contrôle et réussi au deuxième. Comment alors tirer des conclusions sur ces deux types de résultats ?

Peut-on dire que dans le premier cas (réussite puis échec), les élèves ont reproduit les adaptations vues quelques jours auparavant en classe, mais sans les avoir vraiment comprises, et que dans le second (échec puis réussite), l'apprentissage des élèves a pris plus de temps ? Faut-il croire que la difficulté dans le deuxième contrôle venait du fait que les révisions portaient sur un plus grand nombre de chapitres ? Nous essaierons, à l'aide de la comparaison avec les tâches en classe et leur déroulement, de mieux comprendre les échecs des élèves à chacun de ces deux contrôles.

Le niveau des élèves de cette classe est assez bon, on l'a signalé, et cela a été confirmé par les passages des élèves en classe de 1ère l'année suivante: 26 d'entre eux sont passé en 1ère S, 5 en 1ère ES, et seulement 4 élèves ont redoublé.

Par rapport au classement que nous avons essayé d'effectuer – qui compte 22 "bons" élèves, 12 "mauvais"[64] – il y a donc forcément quelques incohérences. A l'aide des résultats du 3ème trimestre, nous avons pu constater que deux élèves qui n'avaient pas brillé dans ce chapitre avaient tout de même des moyennes tout à fait correctes, qui justifiaient leur passage en S ; quant aux autres, ils doivent leur passage en S plus à leur moyenne en sciences physiques qu'en mathématiques ! A deux élèves près, notre classement semble donc cohérent.

[64] une élève absente aux deux contrôles n'a pas été classée

Au passage, nous pouvons regarder plus particulièrement les résultats des élèves qui prennent des cours particuliers. Nous constatons qu'il s'agit ici d'élèves plutôt mauvais, ou du moins qui ne sont pas passés en $1^{ère}$ S l'année suivante. Il semblerait donc qu'ici le soutien apporté par les aides extérieures n'ait pas été suffisant pour remonter le niveau de ces élèves, pas plus dans ce chapitre que globalement sur l'année.

h) Comparaison avec les tâches du cours et interprétation

Nous avons dressé à nouveau le tableau comparatif des tâches en contrôle et en classe, compte tenu du déroulement des activités sur ces tâches en classe, et des résultats des élèves au contrôle.

Cette fois-ci, nous n'avons pas tenu compte des "bons" ou "mauvais" élèves dans notre tableau de synthèse, parce que le niveau de la classe est plutôt bon et aussi parce que les résultats aux trois devoirs notés ne nous permettent pas de tirer des conclusions, étant donné que le devoir à la maison a été "trop" bien réussi ! Nous essaierons tout de même de discuter certains des résultats en fonction de notre classement.

ex	ex en classe	config	comparaison des connaissances anciennes intervenant		même connais-sance nouvelle	NMF en classe par rapport à celui de contrôle ou du devoir	type de travail en classe	types d'aides	résultats des élèves reconnaissance de la propriété à appliquer
			avant	après					TOTAL / abordé
1er contrôle									
1 1)	Ex 3 et Ex 1(2)	Cercle mais Δ non emboîtés	la même		D'1	identique	module 10 min 10 de tps recherche	après recherche méthode et homologues rappels	32/33
1 2)	Ex3 et Ex 1(2)	Cercle mais Δ non emboîtés		aucune (ici algèbre)	P1	plus difficile	module 10 min 10 de tps recherche	après recherche méthode et homologues rappels	9/23
2 2)	aucun				P'1				23/29
2 4)	Ex 77 p 217		(ici aucune)	(ici aucune)	P2	plus difficile	pas de tps recherche en classe mais ex préparé à la maison	méthode homologues questions fermées	25/30
devoir									
1 2)	Ex 2 fiche 2	Différente	La même	La même (algèbre)	D'1 puis P1	Plus facile	Non filmé	Non filmé	32/34
1 3)	Ex 6	2 Δ mais non emboîtés		La même (isométrie)	D'1 (puis P1 en classe)	Plus difficile	Préparé à la maison	Méthode Directive Dès le début	34/34
1 5)	3 ex en classe	1 ex avec la même config	(ici aucune)	(ici aucune)	P2	Plus difficile	Préparé à la maison Temps de recherche	Méthode	33/33
2 1)	Ex 2 fiche 2	Différente	La même	La même (algèbre)	D'1 puis P1	Plus facile	Non filmé	Non filmé	32/33
2ème contrôle									
1 1)	1 ex en classe et 1 ex en AI	Config différentes	différente	différente	P'1	identique	Préparé à la maison / en AI	Aides méthode	17/32

- premier contrôle

Dans le premier contrôle, la première question a été très bien réussie : 32 élèves sur les 33 ayant abordé l'exercice, ce qui représente tous les élèves présents sauf un[65].

L'application de D'1 demandée ici avait déjà été vue deux fois en classe dans les mêmes conditions, avec un niveau de mise en fonctionnement plus élevé, mais avec la même configuration et l'une au moins des connaissances anciennes associées. Ces deux exercices (ex 3 et ex 1(2)) avaient été donnés à faire en module ; dans le cas du premier il s'agissait d'un exercice préparé à la maison, et pour le deuxième, les élèves avaient bénéficié de temps de recherche (10 min 10). Il a donc potentiellement eu un travail individuel des élèves sur cette question.

En regardant le déroulement des activités, on peut voir que lors du premier exercice, la tâche de repérage des homologues incombait aux élèves, alors que lors du deuxième, c'est le professeur qui l'a réalisée. Dans les deux cas c'est le professeur qui avait pris en charge les applications algébriques qui concluaient ces exercices.

Un exercice similaire avait aussi été donné lors de la première séance d'aide individualisée.

Nous pouvons donc penser qu'un travail autonome des élèves – en module ou à la maison – pour une application qui n'a été vue que deux fois en classe, a pu bénéficier ici aux élèves, et leur a permis de résoudre une tâche similaire en contrôle.

Pour la deuxième question de l'exercice, nous avons déjà souligné la difficulté possible des élèves pour démontrer l'égalité des produits de trois longueurs – et non plus deux comme ils en ont l'habitude – dans la question 2).

En effet, on peut voir que seuls 9 élèves sur les 23 qui ont abordé cette question ont réussi à écrire l'égalité demandée. Pour les 14 autres, l'application de P1 n'a pas posé problème, mais c'est la manipulation algébrique des égalités obtenues qui n'a pas été réussie ou même pas abordée sur leur copie (pour 11 d'entre eux). Ici, le fait que le professeur ait toujours pris en charge ce type de difficulté en classe – y compris dans les autres exercices que ceux qui ressemblent au premier exercice du contrôle – semble avoir freiné l'apprentissage des élèves sur ce point, ou du moins leur réussite à cette question.

Les quelques élèves qui ont tout de même réussi cette question font partie de ceux que nous avons qualifiés de "bons" élèves, sauf pour l'un d'entre eux.

Pour le deuxième exercice, les résultats des élèves sont assez bons (23 et 25 bonnes réponses respectivement pour les deux questions). Pour résoudre la question 2), il fallait appliquer P'1, après

---

[65] sans vouloir accabler le seul élève ayant échoué !

avoir prouvé la proportionnalité des côtés à l'aide de la propriété de la droite des milieux et de la médiane du triangle rectangle. Ces propriétés plus anciennes n'avaient pas été révisées en cours (en tout cas pas sur les vidéos dont nous disposons), mais, comme toutes les propriétés de géométrie de collège, dans un chapitre de révision au début de l'année.

7 élèves ont résolu cette question en appliquant D'1 ou P3, mais leur démonstration est alors un peu compliquée. La propriété P'1 n'a été travaillée que dans un seul exercice en classe entière (61 p 216), mais dans un contexte totalement différent (géométrie analytique). Cet exercice avait été préparé à la maison, et corrigé en séance de module, avec des aides très directives de la part du professeur. 16 élèves ont tout de même utilisé P'1 correctement pour démontrer la similitude, et parmi eux 14 de nos bons élèves.

Il est possible que le travail à la maison sur P'1 ait profité uniquement aux bons élèves, seuls capables – à deux exceptions près - de réinvestir dans le contrôle cette propriété pourtant peu travaillée en classe. Il est peut-être possible aussi que le fait de démontrer cette propriété en classe ait été profitable à certains élèves, mais il est difficile pour nous de juger des effets d'une telle gestion du cours sur les apprentissages.

Par la suite, avant le deuxième contrôle, le professeur donnera en module et en aide individualisée plusieurs exercices qui font travailler la propriété P'1. Peut-être pour pallier les difficultés des élèves révélées au contrôle ?

Parmi les 25 élèves ayant réussi la question suivante, 5 n'avaient pas réussi, ou pas abordé, la première question, et d'autre part 3 élèves n'ont réussi que la première question. Il fallait ici appliquer P2, propriété travaillée récemment en classe à travers 4 exercices, dont 3 préparés à la maison. Le niveau de mise en fonctionnement était simple – plus simple que celui des applications faites en classe – et le repérage des homologues étant facilité par la connaissance des côtés homologues grâce aux questions précédentes. Sur les 25 bonnes réponses, 21 proviennent de bons élèves, et 4 seulement de mauvais.

On peut certainement expliquer la réussite plus grande à la deuxième question de cet exercice qu'à la première (avec application de P'1) par le fait que plus d'exercices avaient été préparés sur la propriété P2, et plus récemment avant le contrôle.

- devoir à la maison

Le devoir à la maison est très bien réussi par presque tous les élèves. Il est difficile d'interpréter les résultats, d'autant que nous ne savons pas comment les élèves ont travaillé leur devoir, et quel type d'aide ils ont pu recevoir à la maison pour le préparer. En revanche, nous pourrons peut-être tirer parti de ce devoir en regardant s'il a permis à certains élèves de travailler des notions évaluées ensuite en contrôle. En particulier : un travail éventuellement long et individuel sur l'introduction d'étapes, et une révision des triangles isométriques.

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'énoncé des deux exercices du devoir ne mentionne pas la similitude. Les propriétés nécessaires pour résoudre ici doivent donc faire partie des connaissances disponibles des élèves. Evidemment, le devoir étant donné à la fin du chapitre sur les triangles semblables, il est possible que les élèves soient incités à utiliser cette notion quoi qu'il arrive, même s'il existe une autre façon de faire, éventuellement plus efficace. Nous discuterons plus loin de la possibilité de résoudre cet exercice sans utiliser les triangles semblables.

- deuxième contrôle

Ce dernier contrôle a eu lieu environ dix jours après la fin du chapitre sur les triangles semblables. Il portait aussi sur d'autres notions, et un seul exercice concerne les triangles semblables.

17 élèves ont réussi cet exercice. Seuls 2 élèves n'ont pas abordé l'exercice, et les 15 autres ont commis des erreurs dans l'application de la propriété P3 (10 élèves), ou bien des erreurs dans le calcul des longueurs à l'aide de la propriété de Pythagore (5 élèves). La propriété P3 avait été travaillée en classe à travers 2 exercices, dont l'un préparé à la maison.

Parmi les 17 élèves ayant réussi cet exercice, 16 font partie de nos 22 "bons" élèves (la 17$^{\text{ème}}$ est aussi globalement une "bonne" élève si l'on en croit sa moyenne du 3$^{\text{ème}}$ trimestre). Peut-on voir dans la capacité de ces élèves à mobiliser cette notion, même après la fin du chapitre, une caractéristique des apprentissages des bons élèves, voire même une explication partielle de leur meilleur niveau ?

En conclusion, pour les analyses réalisées dans la classe de ce professeur, nous pouvons dire qu'il semble que le travail répété d'une notion (D'1) ait profité à tous les élèves, et que le travail à la maison ait plutôt été bénéfique aux bons élèves, pour la réussite à ces deux contrôles du moins. Les capacités des bons élèves à mobiliser la notion de triangles semblables après la fin du chapitre semblent aussi caractéristiques d'une certaine différentiation dans les apprentissages.

2) Nos analyses pour Mme F.

a) Présentation de Mme F.

Mme F. enseigne dans un très bon lycée parisien, sa classe de 2nde est d'un niveau excellent : les élèves y sont choisis sur dossiers parmi les meilleurs de l'établissement.

Mme F. n'a pas voulu réaliser elle-même les vidéos des cours sur les triangles semblables, c'est pourquoi nous avons dû assister aux cours pendant tout le chapitre, ainsi que sur le chapitre précédent sur les triangles isométriques, faute de pouvoir déterminer avec précision quand cette partie du cours allait commencer. Nous avons photocopié les copies d'élèves au contrôle final sanctionnant les deux chapitres.

Les séances de Mme F. sur les triangles semblables sont mélangées avec des séances d'analyse sur les fonctions de référence. C'est pourquoi certaines des séances filmées comportent très peu de temps sur la notion qui nous intéresse. Les chapitres triangles isométriques et triangles semblables ont été traités à la suite l'un de l'autre. Les triangles isométriques ont été introduits à l'aide des transformations. Pour introduire ensuite la notion de triangles semblables, Mme F. donne la définition, et souligne l'analogie avec les triangles isométriques, qui viennent tout juste d'être vus.

Mme F. utilise le manuel Pythagore dans lequel elle donne des exercices à faire aux élèves, ce sont souvent ceux à faire à la maison.

Les différentes séances[66] sur le chapitre des triangles semblables se répartissent ainsi :

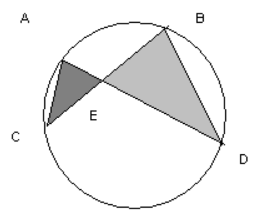
[66] Voir ANNEXES : découpage des séances de Mme F.

séances	cours	exercices
1	introduction (classe entière) donnée de D'1, D1 et P1	2 applications de D'1
2	module (demi-classe) rappel de P1, donnée de P'1, de P3 et de P2 (admises)	Démonstration de P1
3	cours (11 min) classe entière rappel de P'1, P2 et P3, notés dans le cours	
4	Exercices, classe entière (non filmé)	Application de D'1 + P1 + P2
5	module, 1 vidéo pour chaque ½-classe	Application de
6	exercices (37 min) classe entière (manquent 8 élèves)	
7	exercices (17 min) classe entière (manquent 8 élèves)	
	Vacances scolaires	
8	exercices (20 min) classe entière	
9	module 1 vidéo d'une ½ - classe	
	contrôle (non filmé)	
10	correction du contrôle, classe entière	

b) Analyse a priori des tâches en classe ou à la maison

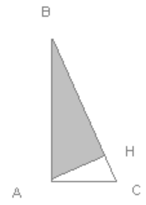
- 1ère séance

exercice 1 : *Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.*



Il s'agit ici d'utiliser la définition D'1 : montrer que les deux triangles ont deux angles respectivement égaux pour démontrer la similitude. On utilise des égalités d'angles : opposés par le sommet E, et angles inscrits (A et B ou C et D), puis on déduit la similitude. Les noms des triangles sont écrits dans le bon ordre, ce qui peut faciliter le repérage des homologues.

exercice 2 :
ABC est un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. Montrer que les triangles ABC et AHB sont semblables. Citer un 3ème triangle semblable aux 2 précédents.

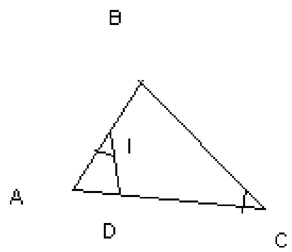


On utilise la définition D'1 avec les deux angles suivants : AHB et BAC qui sont deux angles droits, et l'angle b qui est commun. Les noms des triangles sont cette fois-ci écrits dans le désordre. Si l'ordre des sommets dans l'énoncé n'est pas systématiquement le même, les élèves devront toujours effectuer le repérage des homologues.

Lors de deux séances suivantes, le professeur ne va pas faire d'exercice avec les élèves, mais va organiser un cours dialogué visant à la découverte, et parfois à la démonstration, de certaines propriétés du cours.

- 4ème séance

exercice 3 :
soit un triangle ABC, tel que AB = 2.8 cm, BC = 3.9 cm, AC = 4.2 cm; I milieu de [AB]; angle AID = angle ACB
1) calculer AD et ID
2) évaluer le rapport (aire de AID) / (aire de ABC)

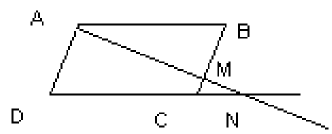


On démontre d'abord que les triangles AID et BAC sont semblables à l'aide de la définition D'1, car ils ont deux angles respectivement égaux (I et C, puis l'angle A commun) ; puis en appliquant P1, il y a proportionnalité des côtés homologues (qu'il faut alors repérer, les noms des triangles n'étant pas donnés dans cette question), ce qui permet d'écrire les égalités de rapports : AI/AC = ID/CB = AD/AB. Comme AC, BC et AB sont connues, en effectuant des produits en croix on obtient les longueurs demandées. Ici la similitude n'est pas indiquée par l'énoncé, il faut donc penser à l'utiliser pour calculer les grandeurs demandées.

Pour trouver le rapport des aires, il faut d'abord calculer le rapport de similitude, puis appliquer la propriété P2.

- $5^{\text{ème}}$ séance (module)

exercice 4 : (Pythagore 2nde, 42 p 190)
ABCD parallélogramme, M appartient à (BC), (AM) coupe (DC) en N.
a) montrer que ABM et CMN sont semblables,
b) montrer que ADN et CMN sont semblables
c) en déduire que MB x ND est constant



Pour la première question, il faut utiliser la propriété D'1, en montrant au préalable que les angles BAM et CNM sont égaux car alternes-internes, et que les angles AMB et NMC sont opposés par le sommet.

Pour la deuxième question, on utilise la même propriété, avec les angles correspondants ADN et MCN, et l'angle N en commun.

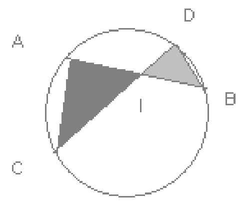
Dans les deux cas, les noms des triangles sont écrits dans le bon ordre.

Pour la dernière question, on utilise la propriété P1 pour chacune des similitudes précédentes, et on combine les égalités ainsi obtenues jusqu'à avoir l'égalité : MB x ND = AB x AD.

exercice 5 : *(Pythagore 2nde, 47 p 190)*

AB et DC sont deux cordes d'un même cercle sécantes en I

montrer que IB x IA = ID x IC

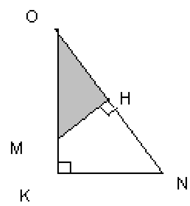


Même si ce n'est pas indiqué par l'énoncé, il faut d'abord démontrer la similitude de ACI et BID, en utilisant la définition D'1 . On utilise des égalités d'angles : opposés par le sommet I, et angles inscrits (A et D ou C et B), puis on déduit la similitude. Ensuite on écrit les rapports obtenus grâce à la propriété P1 et on effectue les produits en croix.

exercice 6 : *(Pythagore 2^{nde}, 48 p 190)*

OKN triangle rectangle en K, M appartient à [OK], H le projeté orthogonal de M sur (ON)

montrer que ON x OH = OM x OK



Il s'agit du même type de tâche que précédemment, seule la configuration et les connaissances anciennes associées changent.

On utilise d'abord la propriété D'1 à l'aide des angles O (commun aux deux triangles) puis H et K (angles droits), pour montrer que OKN et OMH sont semblables, puis on utilise la propriété P1 pour déduire les rapports de longueurs et leurs produits en croix.

__exercice__ 7 __:__ (Pythagore 2^{nde}, 51 p 190)

ABC triangle rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A

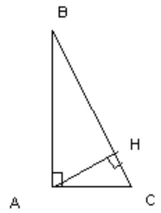
a) montrer que ABC et HBA sont semblables

b) en déduire que AB² = BC x HB

c) en déduire que CA² = CB x CH

d) montrer que HBA et HAC sont semblables

en déduire que HA² = HB x HC



Il s'agit encore du même type de tâche, cette fois-ci dans la même configuration. En revanche, la similitude est clairement indiquée par l'énoncé, avec même des noms de triangles écrits dans le bon ordre. On utilise D'1 (avec un angle commun et deux angles droits) puis P1 comme pour l'exercice précédent, on en déduit les deux premières égalités. Même chose pour la question d).

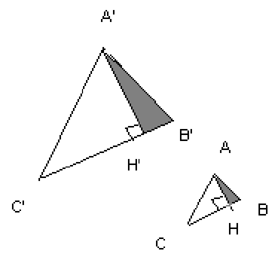
- $6^{ème}$ séance

__exercice 8 :__ (Pythagore 2^{nde}, 25 p 188)

ABC et A'B'C' sont semblables, H (resp. H') pied de la hauteur issue de A (resp. A'), on pose B'C'/BC = k.

a) montrer que ABH et A'B'H' sont semblables

b) déterminer le rapport A'H'/AH

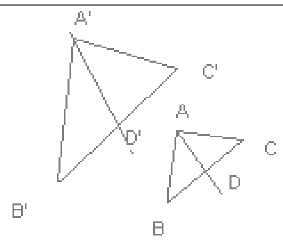


On utilise la similitude des deux triangles pour en déduire l'égalité d'un de leurs angles, et comme

ABH et A'B'H' ont un angle droit, ils sont semblables grâce à D'1. On utilise ensuite P1 et on écrit les rapports de longueurs de ABC et A'B'C' et ceux de ABH et A'B'H', et en combinant les rapports, on obtient celui qui est demandé, que l'on exprime à l'aide de k, ce qui oblige à manipuler des expressions algébriques.

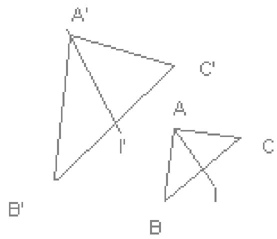
- $7^{\text{ème}}$ séance

exercice 9 : *(Pythagore 2^{nde}, 27 p 188)*
ABC et A'B'C' sont semblables, la bissectrice de CAB (resp.C'A'B') est sécante à [BC] (resp. [B'C']) en D (resp. D'). Montrer que A'D' / AD = A'B' / AB



On doit d'abord choisir de démontrer que les triangles ADB et A'D'B' sont semblables à l'aide de D'1 et d'égalité d'angles, puis on utilise P1 pour obtenir le rapport demandé. La similitude de ces deux triangles n'est pas suggérée par l'énoncé, mais celle de ABC et A'B'C' y fait facilement penser.

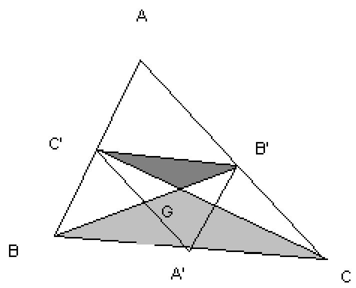
exercice 10 : *(Pythagore 2^{nde}, 26 p 188)*
ABC et A'B'C' sont semblables, I (resp.I') est le milieu de [BC] (resp. [B'C'])
montrer que A'I'/AI = A'B'/AB



Ici encore il faut d'abord démontrer que les triangles AIB et A'I'B' sont semblables (même si ce n'est pas indiqué) à l'aide de P3 : une égalité d'angles (angle commun) et de deux côtés proportionnels (rapport ½), puis on utilise P1 pour obtenir le rapport demandé. Il s'agit du même type d'exercice que précédemment.

- $8^{ème}$ séance

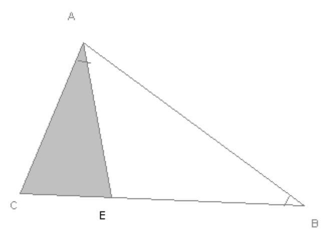
exercice 11 : *(Pythagore 2^{nde}, 32 p 188)*
A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC ; G est le point d'intersection des médianes (BB') et (CC').
a) montrer par des considérations angulaires que GBC et GB'C' sont semblables
b) montrer GB'/GB = GC'/GC = 1/2



Après avoir démontré que (B'C') // (BC) (propriété de la droite des milieux), on utilise des égalités d'angles (opposés par le sommet G, correspondants) pour démontrer la similitude grâce à D'1. On peut aussi utiliser la proportionnalité des côtés avec la propriété P'1 ou encore P3.

On déduit les rapports avec P1.

exercice 12 : *(Pythagore 2^{nde}, 33 p 189)*
E appartient au coté [BC] du triangle ABC tel que les angles ABC et CAE aient même mesure
a) montrer que ABC et AEC sont semblables
b) montrer que AB x AC = BC x AE



On utilise D'1 avec l'égalité de deux angles (C est commun et A=B), puis P1. Les noms des triangles sont dans le bon ordre.

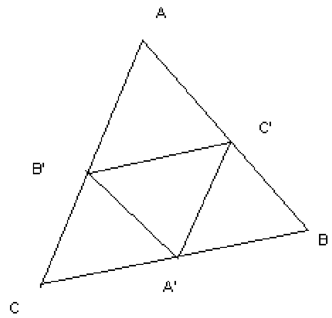
exercice 13 : *(Pythagore 2^{nde}, 30 p 188)*

A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC

a) rappeler le théorème des milieux

b) montrer que ABC et A'B'C' sont semblables

c) en déduire que l'aire de A'B'C' = ¼ de l'aire de ABC



On peut utiliser plusieurs méthodes pour démontrer la similitude. On peut utiliser la proportionnalité des côtés du triangle et des côtés du triangle des milieux dans le rapport ½ (propriété de la droite des milieux rappelée précédemment), et dans ce cas utiliser P'1. On peut aussi utiliser les parallèles (propriété de la droite des milieux) pour démontrer des égalités d'angles correspondants et conclure avec la propriété D'1.

La dernière question se résout à l'aide de la propriété P2, après avoir déterminé le rapport de similitude de ½.

.

- $9^{ème}$ séance

exercice 14 : *(Pythagore 2^{nde}, 53 p 191)*

A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon R, (AB) et (CD) se coupent en M, (MO) recoupe le cercle en E et F

a) montrer AMD et CMB sont semblables, en déduire que MA x MB = MC x MD

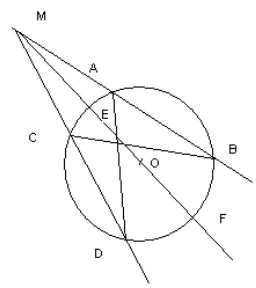
b) montrer que ME x MF = MO^2-OE^2

c) on pose OM = d, déduire que MA x MB ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à d^2-R^2

d) (MT) tangente en T au cercle, montrer que MA x MB = MT^2

e) utiliser l'égalité précédente pour prouver que MAT et MTB sont semblables

f) montrer que les angles ABT et ATM ont même mesure



On démontre le a) avec D'1 à l'aide de deux angles inscrits et d'un angle commun.

On démontre le b) à l'aide de calculs sur les longueurs, de même que le c) en utilisant les deux premiers résultats.

On démontre le d) à l'aide du théorème de Pythagore.

On démontre le e) à l'aide de P3 et des questions précédentes, puis f) en utilisant la question e)

Dans cet exercice, les triangles semblables constituent un outil pour démontrer une propriété intéressante des grandeurs de la figure. Cependant, le découpage des questions ne permet peut-être pas de voir la dimension d'outil prise ici par la notion de similitude.

c) Déroulement

Pendant les séances en classe, le professeur est assez directif, voire autoritaire. Les élèves lèvent la main pour répondre, et souvent assez durement repris s'ils oublient cette politesse. Le professeur encourage cependant beaucoup les élèves, les félicite lorsqu'ils répondent correctement, et souligne souvent la difficulté des exercices abordés pour ne pas qu'ils se découragent.

Les exercices des modules sont préparés à la maison et corrigés au tableau par les élèves volontaires. Les deux groupes sont de niveau différent (les latinistes étant considérés comme meilleurs) et le déroulement n'est d'ailleurs pas le même pour les deux séances de module, alors que les énoncés proposés sont identiques. En effet, le professeur laisse moins d'autonomie aux élèves du groupe considéré comme moins bon, et les élèves n'ont pas autant de temps de recherche que dans le premier groupe.

Pendant les séances d'aide individualisée, le professeur laisse habituellement les élèves exposer leurs difficultés et les laisse chercher beaucoup plus longtemps (environ 8 minutes, contre 1 minute en classe). Le type de correction des exercices est le même qu'en classe, mais le professeur y passe plus de temps, et interroge en priorité l'élève qui ne sait pas, à l'inverse de la correction en classe. Le professeur n'a pas fait de séances d'aide individualisée sur ce chapitre, préférant utiliser cet horaire pour des séances d'approfondissement en analyse avec les meilleurs élèves.

d) Bilan des tâches en classe et à la maison

Nous avons fait, toujours suivant les mêmes critères, le bilan des tâches en classe et de leur déroulement, que l'on peut lire dans le tableau suivant.

ex	Conf	Connaissances		Niveau de mise en fonctionnement	Déroulement			
		Anciennes	Nv		Tps silence	Aides du professeur		
						Nature	Moment	Forme
1	cercle	Egalités d'angles, angle inscrit	D'1	calcul d'intermédiaires (égalité de deux angles)	0 min 30 (début)	méthode	du début jusqu'à la fin	questions fermées
2	2 Δ rect	Δ particuliers	D'1	reconnaissance des modalités d'application	0 min 30 (début)	méthode	du début jusqu'à la fin	questions fermées
3 a)	2 Δ emboîtés		D'1 puis P1	introduction d'étapes (démo de la similitude, repérage des homologues)		méthode	du début jusqu'à la fin	
b)			P2	calcul d'intermédiaires (rapport de similitude)				
4 a)	//gramme, Thalès	égalités d'angles	D'1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	module **ex préparé à la maison** questions fermées
b)		égalités d'angles	D'1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)				
c)		numérique	P1	utilisation des questions précédentes				
5	cercle	angle inscrit et égalité d'angles	D'1 puis P1	introduction d'étapes (choix des triangles et démo de la similitude)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	module **ex préparé à la maison** questions fermées
6	2 Δ rect		D'1 puis P1	introduction d'étapes (choix des triangles et démo de la similitude)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	module **ex préparé à la maison** questions fermées
7 a)	2 Δ rect emboîtés		D'1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	module **ex préparé à la maison** questions fermées
b)			P1	reconnaissance des modalités d'application				
c)			P1	reconnaissance des modalités d'application				
d)			D'1 puis P1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)				
8 a)	2 Δ rect		D'1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)	31 min ???	méthode	lors de la correction	(non filmé)
b)		numérique	P1	reconnaissance des modalités d'application				
9	2 Δ	droite remarquable	D'1 puis P1	introduction d'étapes (choix des triangles et démo de la similitude)	peu d'interventions	méthode		(non filmé) ex cherché en classe puis terminé à la maison
10	2 Δ		P3	introduction d'étapes (choix des triangles et démo de la similitude)	peu d'interventions	méthode		(non filmé) ex cherché en classe puis terminé à la maison
11	2 Δ Thalès	droite des milieux égalité angles	D'1	introduction d'étapes (démo des // et de l'égalité d'angles)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	**ex préparé à la maison** questions fermées
		droite des milieux	P1	reconnaissance des modalités d'application				
12	2 Δ emboîtés		D'1	reconnaissance des modalités d'application	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	**ex préparé à la maison** questions fermées
			P1	reconnaissance des modalités d'application				
13 b)	2 Δ Thalès	droite des milieux	D'1 ou P'1	calcul d'intermédiaires (droites // ou côtés proportionnels)	3 min	méthode	fin	questions fermées
c)			P2	reconnaissance des modalités d'application				
14a)	cercle, 2 Δ emboîtés	angle inscrit	D'1 puis P1	calcul d'intermédiaires (angles égaux)	0 min	méthode	du début jusqu'à la fin	module, **exercice préparé à la maison** questions fermées
e)		Pythagore (avant), algèbre	P3	utilisation des questions précédentes				

De ce premier tableau ressortent quelques constatations, et en particulier, la très grande stabilité des pratiques de ce professeur sur ce chapitre.

- le type de travail en classe et les aides apportées par le professeur

Tout d'abord, c'est le faible temps de recherche accordé aux élèves qui ressort de cette analyse : les élèves bénéficient rarement de temps de silence pour chercher eux-mêmes les exercices, sauf lors de la $4^{ème}$ séance (exercices 8, 9 et 10), qui n'a pas été filmée, ni même observée, mais qui nous a été décrite par le professeur. Cette description peut être, bien entendue, très subjective, au vu du déroulement des autres séances !

Les aides apportées par le professeur pendant l'activité portent souvent sur la méthode, et surviennent dès le début et sous forme assez directive (questions fermées, voire questions à trous).

- le travail à la maison

Nous pouvons remarquer que beaucoup des exercices faits en classe ont été préparés à la maison, ce qui peut aussi expliquer le manque de temps de recherche en cours. Les exercices à faire à la maison ne sont pas uniquement des exercices simples, mais ils sont parfois un peu répétitifs (2 ou 3 exercices similaires à la suite parfois).

- les répétitions, la variété, la difficulté, la progression des tâches et applications proposées

Les propriétés D'1 et P1 sont travaillées plus que les autres (8 fois pour D'1 seule, 6 fois pour P1 seule, et 7 fois pour D'1 + P1, sur un total de 25 applications proposées). Les propriétés plus "rares" que sont P2 et P3 sont travaillées au moins une fois, mais pas P'1 (sauf dans un exercice, mais où l'on peut aussi utiliser D'1).

Les niveaux de mise en fonctionnement sollicités sont variés : 8 reconnaissances des modalités d'application, 8 calculs d'intermédiaires, 8 introductions d'étapes ou de choix pour l'élève. Les difficultés sont réparties sur tout le chapitre, il y a des applications complexes dès les premiers exercices, et il y a aussi des applications simples à la fin.

- le travail de la notion

Les triangles semblables sont souvent écrits avec les sommets dans le désordre dans les exercices, voire pas écrits du tout (introduction de l'étape "démonstration de la similitude" non indiquée dans 3 des exercices). Le repérage des sommets homologues fait donc presque toujours partie des sous-tâches à réaliser.

La similitude est parfois dans ces exercices un outil pour démontrer des propriétés des figures, surtout dans des applications assez simples, données au début du chapitre. Mais les exercices sont très découpés, et, sauf dans les 3 où la similitude n'est pas mentionnée, il est toujours explicitement demandé de démontrer que des triangles sont semblables.

Nous avons dressé ici aussi le tableau de ce qui reste à faire à l'élève, pour chaque tâche, compte tenu du déroulement. Il en ressort que toutes les propriétés du cours ont été données assez tôt, ce qui oblige l'élève à faire un choix parmi les différentes propriétés nouvelles dont il dispose. (voir tableau page suivante)

On peut voir que le repérage des homologues n'est pas souvent pris en charge par le professeur, et que le mélange des propriétés nouvelles avec des propriétés anciennes est ici plus rare que dans les deux autres classes.

Les élèves ont beaucoup de tâches simples et isolées à réaliser en classe, mais aussi beaucoup de choses à préparer à la maison. Nous verrons si ce travail à la maison compense, lors du contrôle, le manque de travail autonome des élèves en classe.

ex	type de tâche a priori : ASI ou adaptation	ce que l'élève cherche tout seul en classe	ce que l'élève fait tout seul en classe	connaissances nvelles	repérage des homologues en classe	prise en charge ancien/nouveau en classe
1	calcul d'intermédiaires	retrouver la propriété (à réviser)	réciter le th recopier la solution	D'1	le prof demande de les trouver puis en suggère une paire	le prof fait réciter le th de l'angle inscrit
2	reconnaissance des modalités	démo (30 s)	répond à des q° fermées	**D'1**, (P1)	le prof en suggère une paire	
3 a)	introduction d'étapes		ASI et copie	**D'1, P1,** P'1, P3, P2		pas de mélange
3 b)	calculs d'intermédiaires		ASI et copie	D'1, P1, P'1, P3, **P2**		pas de mélange
4 a)	calcul d'intermédiaires	(préparé à la maison)	ASI et copie	**D'1**, P1, P'1, P3, P2		
4 b)	calcul d'intermédiaires	(préparé à la maison)	copie	**D'1**, P1, P'1, P3, P2		ici pas de rappel alternes/internes
4 c)	utilisation des q° précédentes	(préparé à la maison)	copie	D'1, **P1,** P'1, P3, P2		
5	introduction d'étapes	(préparé à la maison)	ASI et copie	**D'1, P1,** P'1, P3, P2		
6	introduction d'étapes	(préparé à la maison)	ASI et copie	**D'1, P1**, P'1, P3, P2	le prof insiste sur écriture des homologues	pas de mélange
7 a)	calcul d'intermédiaires	(préparé à la maison)	copie	**D'1,** P1, P'1, P3, P2		pas de mélange
7 b)	reconnaissance des modalités	(préparé à la maison)	ASI et copie	D'1, **P1**, P'1, P3, P2	le prof insiste sur écriture des homologues	pas de mélange
7 c)	reconnaissance des modalités	(préparé à la maison)	copie	D'1, **P1**, P'1, P3, P2		pas de mélange
7 d)	calcul d'intermédiaires	(préparé à la maison)	ASI et copie	**D'1, P1,** P'1, P3, P2		pas de mélange
8 a)	calcul d'intermédiaires	démo (30min) sans aide	travail perso puis copie	**D'1**, P1, P'1, P3, P2		pas de mélange
8 b)	reconnaissance des modalités	démo (30min) sans aide	travail perso puis copie	D'1, **P1**, P'1, P3, P2		
9	introduction d'étapes	démo (30min) sans aide	travail perso puis copie	**D'1, P1**, P'1, P3, P2		élève (bissectrice)
10	introduction d'étapes	démo (30min) sans aide	travail perso puis copie	D'1, P1, P'1, **P3**, P2		pas de mélange
11	introduction d'étapes	(préparé à la maison)	copie	**D'1**, **P1,** P'1, P3, P2		élève (droite des milieux)
12	reconnaissance des modalités	(préparé à la maison)	copie	**D'1, P1**, P'1, P3, P2		pas de mélange
13 b)	calcul d'intermédiaires	démo (3min) sans aide		**D'1**, P1, **P'1**, P3, P2		élève (droite des milieux)
13 c)	reconnaissance des modalités	démo (3min) sans aide	ASI	D'1, P1, P'1, P3, **P2**		prof (droite des milieux)
14 a)	calcul d'intermédiaires	(préparé à la maison)	copie	**D'1, P1,** P'1, P3, P2		
14 e)	utilisation des q° précédentes	(préparé à la maison)	copie	D'1, P1, P'1, **P3,** P2		élève (pythagore) prof (algèbre)

Nous donnons une fois encore un tableau caractéristique de la gestion des activités des élèves en classe, montrant l'influence des interventions sur les activités potentielles des élèves, et permettant de redéfinir ce sur quoi ils ont pu travailler en classe, compte tenu du déroulement (les autres tableaux pour chacune des tâches proposées par ce professeur sont donnés en annexe[67].)

Ex1 : ABC est un triangle inscrit dans un cercle, D appartient à l'arc BC, (AD) coupe (BC) en E. Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.

0 min 30	calcul d'intermédiaires (angles égaux), mélange avec l'ancien (angle inscrit)
0 min30	indication: il faut repérer les homologues
0 min30	Reconnaissance des modalités (repérage) et mélange avec l'ancien
0 min30	Indication : mélange avec l'ancien
0 min30	Un élève donne un paire d'homologues
1 min	Indication : le professeur donne l'autre paire d'homologues
0 min 30	Un élève donne l'ancien
1 min 30	Travail de l'ancien avec le professeur
4 min	Correction, les élèves copient

Nous voyons que ce professeur parle beaucoup: il y a peu de moments de recherche individuelle pour les élèves. L'exercice, nécessitant un calcul d'intermédiaires et un mélange avec l'ancien au départ, est très rapidement simplifié. Les élèves n'ont donc pas eu l'initiative des difficultés a priori de la tâche, sauf peut-être pour les plus rapides d'entre eux.

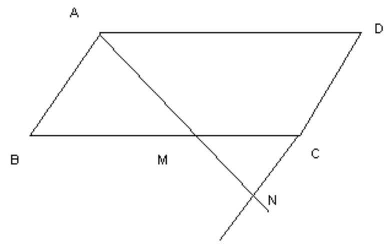
Là encore la très grande stabilité des pratiques de ce professeur est mise en évidence par nos différents tableaux, qui ressemblent tous plus ou moins à celui-ci dans leur structure.

e) Analyse des tâches du contrôle

Le contrôle portait à la fois sur les triangles isométriques et sur les triangles semblables. Seuls les exercices 3 et 4 comportaient des applications de la similitude.

[67] voir ANNEXES : analyse des activités tâche par tâche chez Mme F.

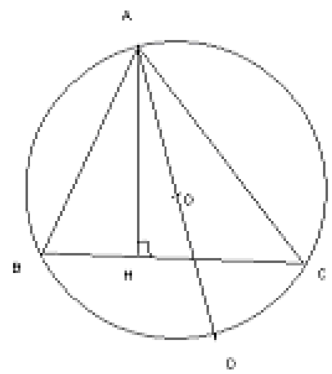
exercice 3 :
ABCD est un parallélogramme, M appartient à [BC], (AM) coupe (DC) en N.
AD = 6cm, AB = 2cm, BM = 2/3BC.
démontrer que les triangles ABM et AND sont semblables
en déduire la valeur de ND



On démontre la similitude à l'aide d'égalités d'angles (alternes-internes) puis on utilise D'1.

Ensuite, à l'aide de P1, on écrit les rapports et on calcule la longueur demandée. Les noms des triangles sont dans le désordre.

exercice 4 :
ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r. H est le projeté orthogonal de A sur [BC], D est diamétralement opposé à A.
démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables
on pose AB = c, AC = b, AH = h, démontrer la relation bc = 2rh



On démontre la première question à l'aide de deux égalités d'angles : 2 angles inscrits et 2 angles droits (grâce à la propriété du triangle rectangle inscriptible dans un demi-cercle) ; on conclut en utilisant D'1. les noms des triangles sont écrits dans le bon ordre.

Pour la deuxième question, on utilise P1, qui nous donne les égalités de rapports, puis on remplace les longueurs par les lettres correspondantes.

f) Bilan de tâches du contrôle et comparaison

ex	**Conf**	**Connaissances qui fonctionnent**		**Niveau de mise en fonctionnement**
		Anciennes	**Nouvelles**	
3 1)	//gramme	égalités d'angles	D'1	calcul d'intermédiaires (égalités d'angles)
2)			P1	reconnaissance des modalités d'application
4 1)	cercle, 2 Δ emboîtés	Δ rect dans un demi-cercle angle inscrit	D'1	calcul d'intermédiaires (démo de l'angle droit et égalités d'angles)
2)		algèbre "avec des lettres"	P1	reconnaissance des modalités d'application

Nous pouvons constater ici que le contrôle ne porte que sur deux des propriétés nouvelles du cours : D'1 et P1, qui sont par ailleurs celles qui ont été le plus souvent travaillées en classe (en tout 21 applications sur 25).

En revanche, les connaissances anciennes présentes dans les exercices du contrôle n'ont pas été travaillées en classe dans le chapitre sur les triangles semblables, ni dans celui sur les triangles isométriques, puisque nous l'avons aussi observé.

g) Résultats des élèves

Les résultats des élèves sont assez bons. Notre classement "bons" et "mauvais" élèves va donc comporter cette fois-ci nettement plus de bons élèves que de mauvais (21 bons élèves et 11 mauvais à moyens) !

Ce classement est toujours à manipuler avec précaution, pour les raisons que nous avons déjà exposées, nous le confortons cependant un peu à l'aide des orientations proposées aux élèves pour l'année suivante (deuxième tableau).

CONTROLE	Ex III 1)	Ex III 2)	Ex IV 1)	Ex IV 2)	notes
connaissance nouvelle	**D'1**	**P1**	**D'1**	**P1**	
NMF	calculer des intermédiaires	reconnaître les modalités	calcul d'intermédiaires	reconnaître les modalités	
connaissances anciennes	égalités d'angles		angle inscrit, Δ dans un demi-cercle	Algèbre avec des lettres	
adrien	f (pté : P3)	b	f (méthode)	b	2
christian	(b) (angles)	f	(b) (démo confuse)	x	2
sophie	b	b	b	b	4
louise	b	f (homologues)	(b)	b	3
walid	b	f (homologues)	b	x	2
benjamin	b	b	b	b	4
armelle	b	b	b	b	4
romain	b	b	b	x	4
nicolas	b	b	b	b	4
guillaume M	b	b	b	b	4
raphaël	b	b	b	b	4
fanny	b	b	b	b	4
hugo R	b	b	b	b	4
emma	b	f (homologues)	b	b	3
martin	b	f (homologues)	b	b	3
hadrien	b	b	b	b	4
guillaume B	f (pté : Thalès)	x	x	x	0
claire	b	b	b	b	4
julian	f (confus : énoncé ?)	x	x	x	0
valérie	b	x	(b) (inachevé)	x	2
cheyenne	(b) (angles)	f (homologues)	x	x	1
camille	b (Thalès et P3)	b (Thalès)	(b) (hypothèse en trop)	x	3
olivia	b	b	b	b	4
fiona	b	f (erreur étourderie)	b	b	3
mathieu	b	b	x	x	2
julia	b	(b) (calculs)	x	x	2
félicie	(b) (hypothèse en trop)	b	b	b	4
margaux	b	b	b	b	4
géraldine	b	b	b	b	4
hugo	(b) (angles)	b	f (angles)	x	2
mario	b	x	x	x	1
roxanne	(b) (Thalès et P'1)	f (méthode)	b	b	3
total : 32	**28/32**	**20/28**	**25/26**	**20/20**	

Nous ne disposons pas ici de toutes les informations concernant les élèves. Nous avons rassemblé celles qui étaient à notre portée. Mais le professeur n'a pas voulu que nous interrogions les élèves pour savoir lesquels parmi eux prenaient des cours particuliers.

orientation	groupe de module	orientation	Note sur 4
adrien	?	?	2
christian	2 = mauvais	rdbt	2
sophie	1 = bon	S	4
louise	1	S	3
walid	2	ES	2
benjamin	2	S ?	4
armelle	1	S	4
romain	2	S	4
nicolas	1	S ?	4
guillaume M	1	S ?	4
raphaël	2	S	4
fanny	1	S	4
hugo R	?	rdbt	4
emma	1	S ?	3
martin	1	S	3
hadrien	?	?	4
guillaume B	2	?	0
claire	2	ES	4
julian	2	ES ?	0
valérie	2	ES ?	2
cheyenne	2	ES	1
camille	1	L	3
olivia	2	ES	4
fiona	1	S	3
mathieu	1	S ?	2
julia	1	S ?	2
félicie	1	S	4
margaux	1	S ?	4
géraldine	2	ES	4
hugo	1	ES	2
mario	2	rdbt	1
roxane	1	S	3

Nous avons une fois de plus utilisé des couleurs plus foncées pour les meilleurs résultats ou pour une orientation sûre en S. Nous avons mis une couleur intermédiaire pour les résultats tangents et un passage en ES. Pour les autres (passage en L, en ES mais incertain et redoublement) nous avons gardé la couleur la plus claire.

Dans cette classe, 10 élèves seulement passeront en 1ère S, ce résultat faible est certainement dû au fait que le niveau imposé par le lycée est très exigent, spécialement dans cette filière. Ces 10 passages correspondent bien à 10 de nos "bons" élèves, de même que les passages incertains en S ou certains en ES correspondent à des élèves bons ou moyens, à une seule exception près. Notre classement est visiblement à peu près cohérent, à quelques exceptions près.

h) comparaison avec les tâches du cours et interprétation

Voici le tableau comparatif des exercices du contrôle avec les tâches données en cours, et le rapprochement avec les résultats des élèves :

ex	**configuration**	**comparaison des connaissances anciennes intervenant**		**même connais-sance nouvelle**	**NMF en classe par rapport à celui de contrôle**	**type de travail en classe**	**types d'aides**	**résultats des élèves**	
								reconnaissance de la propriété à appliquer	**application correcte**
		avant	**après**					TOTAL / abordé	bons élèves / mauvais
3 1)	la même ex 4 a) et b)	la même		D'1	identique	pas de tps recherche en classe mais ex préparé à la maison	méthode fermées	28 / 32 87,5%	21 / 7
3 2)	la même ex 4 c)	aucune	aucune	P1	plus difficile	pas de tps recherche en classe mais ex préparé à la maison	méthode fermées	20 / 28 71,4%	17 / 3
4 1)	la même	la même plus une qui n'a pas été revue en classe		D'1	identique	pas de tps recherche en classe mais ex préparé à la maison	méthode fermées	25 / 26 96,2%	21 / 4
4 2)	la même		différente, vue en classe avec une autre connaissance nouvelle associée	P1	plus difficile	pas de tps recherche en classe mais ex préparé à la maison	méthode fermées	20 / 20 100%	19 / 1

Les résultats des élèves sont ici très bons. La réussite aux questions du contrôle est toujours très élevée (au minimum 71% des élèves ayant abordé la question la réussissent), et parmi nos 21 bons élèves, tous ou presque répondent correctement à chaque fois (sauf 4 bons élèves pour l'exercice 3.2 et 2 dans l'exercice 4.2). Il semble que certains élèves choisissent de ne pas traiter une question sur leur copie plutôt que d'écrire une réponse fausse, c'est peut-être lié aux habitudes de travail et de notation de ce professeur.

Il est vrai que le niveau de la classe est très bon, mais il faut aussi tenir compte du fait que cette évaluation portait sur une application vue très fréquemment en classe (21 fois sur 25). Cet énoncé a été donné plus ou moins sous la même forme (démonstration de la similitude, puis égalité de produits) 6 fois au cours du chapitre et 5 fois sous des formes similaires (démonstration de la similitude puis égalité de produits ou calculs de longueurs), ce qui crée peut-être des réflexes chez les élèves. De plus, le niveau de fonctionnement de ces propriétés n'était pas plus difficile en contrôle, tout au plus identique à ce qui avait été proposé en classe sur ces notions. De plus les exercices qui ont permis de préparer éventuellement ce contrôle avaient été donnés à faire à la maison, ce qui a permis un travail autonome des élèves.

Difficile donc de déterminer ce qui a pu favoriser la réussite des élèves ici ! Regardons plutôt leurs quelques erreurs pour comprendre éventuellement pourquoi certaines questions ont été un peu moins bien réussies.

Dans le premier exercice, la question 2) a posé des problèmes à 8 élèves parmi ceux qui avaient pourtant réussi la première question. C'est la question la moins bien réussie du contrôle. Pour 6 des élèves qui se sont trompés, l'erreur est due à un repérage des homologues incorrect, et sur ces 6, la moitié sont pourtant des bons élèves. Comment expliquer ces erreurs, alors que les élèves ont souvent eu la charge des sommets homologues en classe, et que la configuration des deux triangles de cet exercice du contrôle n'est pas emboîtée ?

On pourrait penser que le fait de laisser faire les élèves seuls n'est pas une preuve qu'ils ont vraiment fait le repérage des homologues. Il se peut aussi qu'ils aient "triché" – comme on l'a déjà vu dans la classe de Mme B. – , et utilisé la question suivante pour les repérer. Finalement, le discours systématique des deux autres professeurs sur l'écriture des homologues, même s'il n'était pas porteur d'une technologie, avait peut-être un effet sur les apprentissages des élèves !

Il nous est difficile de tirer des conclusions sur les apprentissages de ces très bons élèves, mais les résultats trouvés ici ne contredisent pas les constatations que nous avons pu faire précédemment.

3) Comparaison des trois professeurs : Variations et régularités

Nous allons essayer d'établir des comparaisons entre les trois observations et analyses que nous avons faites, afin de dégager des constantes propres à cette notion, et aussi des différences liées aux trois professeurs observés, et d'inscrire ainsi nos observations dans des recherches plus générales sur les pratiques, leur donnant ainsi une portée qui dépasse le simple niveau clinique.

a) Les composantes personnelles et institutionnelles

- les établissements

	Mme B	Mme P	Mme F
Niveau établissement	faible	Très bon	Très bon

Tout d'abord, la comparaison des niveaux des trois établissements dans lesquels nos observations ont eu lieu nous permet de nuancer un peu les différences entre les trois cours analysés : c'est par exemple probablement cet écart entre les niveaux des établissements qui explique que la difficulté des tâches proposées en classe est plus grande chez Mme P. et Mme F. que chez Mme B..

- L'expérience du professeur

	Mme B	Mme P	Mme F
Expérience	moyenne	longue	longue

Là encore, cette comparaison nous permet de nuancer nos analyses. Si Mme B. propose moins de tâches complexes à ses élèves, et qu'elle prend souvent elle-même en charge leur résolution, c'est peut-être aussi parce que son expérience – vis à vis de l'enseignement et de la matière enseignée – est moins longue que celle des deux autres professeurs.

b) L'introduction de la notion nouvelle

- la place du chapitre

Introduction de la notion	Mme B	Mme P	Mme F
Triangles isométriques	Cas d'égalité	Transformations	Transformations
Triangles semblables	Extension de la notion de triangles isométriques	Réponse à un problème	Extension de la notion de triangles isométriques
Les 2 chapitres	à la suite (séparés par vacances)	Pas à la suite	à la suite

Nous voyons que les professeurs ont fait des choix différents. Mme P. est la seule à avoir introduit les triangles semblables longtemps après les triangles isométriques, et aussi la seule à avoir introduit cette notion comme réponse à un problème.

Dans le cas de Mme P., c'est un choix qui est très marqué dans ses activités d'introduction, et qui est très différent de celui de Mmes B. et F. qui font le lien entre les deux chapitres.

Pour Mme B., la notion est introduite en extension du chapitre précédent : les cas de similitude sont en quelque sorte une application plus générale des cas d'égalités.

Pour Mme F. enfin, le lien entre les deux chapitres n'est pas facile à faire, car les transformations qui introduisent les triangles isométriques ne s'étendent pas aux similitudes pour les triangles semblables.

- Le temps

	Mme B	Mme P	Mme F
Nombre de séances pleines	6	8	6 plus 4 bouts de séance (de 85 min au total)

Le temps passé sur ce chapitre est à peu près le même pour les trois classes. Il serait intéressant de pouvoir le comparer à celui passé sur d'autres chapitres – ce qui n'est pas notre cas – mais ce résultat montre tout de même une remarquable stabilité des pratiques observées sur ce chapitre.

- Le cours

	Mme B	Mme P	Mme F
Propriétés nouvelles	introduites par le cours distribué aux élèves (sauf D'1)	devinées oralement à la suite d'exercices	introduites par des exercices
Moment de l'introduction des propriétés nouvelles du chapitre	tout au long des 6 séances	3 dans la première séance, trois dans la cinquième	Dans les deux premières séances de cours ou d'exercices

Les propriétés sont toujours introduites les unes à la suite des autres, mais suivant le rythme auquel le professeur les donnent, les élèves disposent de plus ou moins de propriétés nouvelles en même temps, et donc de plus ou moins de possibilités pour résoudre les exercices, ce qui rajoute des choix à faire parmi les propriétés à utiliser.

Pour Mmes P. et F., les propriétés sont introduites à partir d'exercices qui les font découvrir aux élèves, tandis que le cours de Mme B. est plus construit autour des propriétés elles-mêmes qui introduisent les applications.

Dans tous les cas, nous ne savons pas quelle sera l'influence du choix de l'introduction de la notion sur les apprentissages des élèves. Est-ce que la découverte, par l'élève lui-même, de la notion nouvelle est porteuse d'apprentissage ? Est-ce que le fait de savoir à quoi sert la notion, quel type de problème elle permet de résoudre, est un atout pour la réussite des élèves ? Peut-être pourrait-on penser que l'introduction de la notion nouvelle en tant que réponse à un problème associerait davantage la notion et son utilité en mathématiques.

Très certainement, la construction d'un lien entre les différentes connaissances des élèves est nécessaire pour leur réorganisation et l'intégration de nouvelles connaissances, mais l'introduction de la notion choisie par le professeur peut-elle influencer cette construction, à plus ou moins court terme ?

Il semble tout de même que malgré les différences de niveaux entre les trois classes, l'influence de la composante institutionnelle soit assez forte, que les programmes et horaires imposent certaines contraintes dans ces trois cours, et crée des constantes : même temps passé sur la notion à peu près, même nombre d'exercices environ et mêmes propriétés introduites. C'est le même champ mathématique qui est investit dans les trois classes, ce qui conforte des résultats déjà établis (Roditi, 2004), malgré des stratégies différentes.

Nous allons voir comment les composantes personnelles des trois professeurs vont introduire des variations dans la manière dont est traité le chapitre.

c) Les tâches a priori

Nous allons détailler pour chaque professeur la nature des tâches proposées, en particulier sur chacune des propriétés nouvelles.

- Le statut de la démonstration et son traitement en classe

	Mme B	Mme P	Mme F
Démonstration des propriétés	D'1 et P'1 P1 en devoir à la maison très guidé	P1 et P'1	P1 et P'1

Mme B. a choisi de faire démontrer la propriété D'1 aux élèves, certainement pour les faire travailler spécifiquement sur la démonstration. Mais sur cette propriété presque évidente, le fait de devoir démontrer complique un peu les choses. La propriété P1, plus difficile à démontrer que D'1, est à faire à la maison, mais les élèves n'ont qu'à répondre à des questions fermées qui découpent la tâche.

Mmes P. et F. ont choisi de faire les démonstrations de P1 et de sa réciproque, mais dans le cas de Mme P il s'agit d'exercices cherchés avec les élèves, pour Mme F. cela fait partie du cours magistral.

Le nombre total d'applications proposées sur les propriétés nouvelles est sensiblement le même pour les trois classes : 18 chez Mme B., 19 chez Mme P. et un peu plus chez Mme F : 25 applications. Nos comparaisons ont donc du sens, puisqu'elles portent sur un nombre d'exercices assez proche.

- ce sur quoi portent les applications[68]

[68] il y a plus d'applications que dans le tableau précédent car il peut y avoir plusieurs propriétés appliquées dans chaque exercice.

propriétés	Mme B	Mme P	Mme F
D1 ou D'1	12	12	14
P1	3	10	12
P'1	1	2	1
P2	0	4	1
P3	2	2	2

Pour ces trois professeurs, certaines applications ont été données plus souvent, en particulier celles mettant en œuvre D'1 ou P1 ou D'1 + P1 (respectivement 83% des applications proposées par Mme B. et Mme F. et 65% chez Mme P.) chez Mme B. toutefois, seule l'application de D'1 a fait l'objet de beaucoup d'exercices.

Les autres propriétés sont un peu négligées (voire même parfois non abordées en exercice comme P2 chez Mme B.).

- Le niveau de mise en fonctionnement (a priori)

NMF	Mme B	Mme P	Mme F
reconnaissance	12	4	8
intermédiaires	3	7	9
étapes ou choix	1	8	8
Nombre total d'applications	18	19	25

Les tâches les plus complexes a priori globalement sont celles proposées par Mme P. (45% de NMF $\geq$ introductions d'étapes, contre 33% pour Mme F. et seulement 11% pour Mme B.)

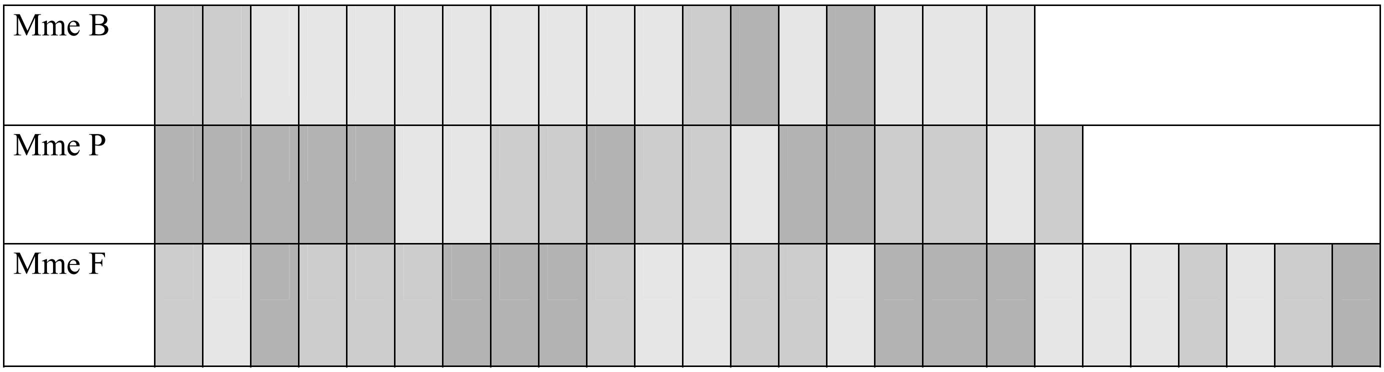
En réalité, certaines applications vont être simplifiées par les aides apportées lors des interventions du professeur en classe. Nous verrons plus loin ce qui reste des tâches proposées aux élèves après ces interventions.

- progression des tâches

Nous avons voulu mettre en évidence la progression des tâches prescrites en termes de complexité. Pour cela, nous avons mis des couleurs de plus en plus foncées au fur et à mesure que les tâches se compliquent.

Reconnaissance des modalités	Calcul d'intermédiaires	Introduction d'étapes ou choix

Voilà le schéma obtenu



La progression des tâches est un peu différente dans les trois classes. Chez Mme B., les applications les plus complexes sont plutôt à la fin, chez Mmes P. et F., cela se complique dès les premières applications, surtout chez Mme P qui commence le chapitre par 5 exercices nécessitant des introductions d'étapes. On peut certainement mettre cela en rapport avec l'introduction choisie par Mme P. qui a privilégié une approche par résolution de problème, donc par des tâches souvent assez complexes.

- travail à la maison

Les exercices donnés à préparer ou à terminer à la maison sont plus nombreux chez Mme P. et Mme F. : 9 pour chacun de ces deux professeurs, contre seulement 3 pour Mme B. Ces exercices portent sur des applications non triviales (5 exercices avec introduction d'étapes chez Mmes P. et F., et une seule fois la simple reconnaissance des modalités), quoiqu'un peu répétitives chez Mme F. qui donne parfois plusieurs exercices similaires à la suite.

- travail en demi-classe

Les trois professeurs profitent des séances en demi-classe pour proposer des exercices plus complexes. Nous verrons que les gestions de ces séances sont cependant assez différentes pour les trois professeurs.

Pour résumer nos analyses pour ces trois professeurs, voilà un tableau de la complexité a priori des tâches données par les trois professeurs.

Type de tâches	Mme B	Mme P	Mme F
en classe	simples	complexes	complexes
en ½ classe	complexes	complexes	complexes
à la maison	simples	complexes	simples ou complexes

Nous devons aussi tenir compte du déroulement pour comparer plus précisément les tâches auxquelles ont pu être confrontés les élèves de ces trois classes.

d) Le déroulement des activités

Types d'aide	Mme B	Mme P	Mme F
Nature	mise en route, méthode, cours	méthode	méthode
Moment	début	du début à la fin	du début à la fin
Forme	questions fermées	questions + ou - ouvertes	questions fermées
Temps silence	peu au début, correction	début et correction	non

Des trois professeurs, c'est Mme F. qui parle le plus : seulement 37 minutes de silence pendant le chapitre (si l'on admet les 31 minutes de silence de la séance non filmée !) contre 64 min 30 pour Mme P. et 62 min 30 pour Mme B. Bien sûr cela doit être rapporté au nombre total de séances, mais il y a déjà une différence notable. C'est lié à la façon dont Mme F. gère les activités des élèves : ils ont très peu d'autonomie en classe.

Les aides apportées par les trois professeurs portent généralement sur la méthode à suivre, mais le moment et la façon dont ces aides interviennent n'est pas le même.

Chez Mme B., l'aide survient au début de l'activité, et le professeur laisse ensuite les élèves travailler sur une tâche souvent très balisée.

Chez Mme F., les aides sont dispensées tout au long des exercices, et sont très directives.

Quant à Mme P., elle laisse les élèves réfléchir à la question posée avant de leur donner des sous-tâches ou des indications.

Ces trois gestions différentes donnent lieu à un travail différent des élèves, comme on a pu le voir en dressant les tableaux des activités potentielles des élèves dans ces trois classes. Il est important de rappeler que ces choix sont liés aux composantes personnelles et institutionnelles du métier qui sont propres à chaque professeur, et que cela limite nos comparaisons et analyses.

e) Le système {contenu + déroulement}

Nous allons reprendre le tableau des tâches a priori dressé pour chaque professeur, et voir comment le déroulement des activités en classe transforme ces tâches, et ce qui reste à faire aux élèves après les interventions du professeur.

NMF	Mme B		Mme P		Mme F	
	A priori	Déroulement	A priori	Déroulement	A priori	Déroulement
reconnaissance	12	12	4	4	8	8
intermédiaires	3	1 (+ 2 ASI)	7	4 (+ 3 ASI)	9	1 (+ 8 ASI)
étapes ou choix	1	1 (non filmé)	8	4 (+4 intermédiaires)	8	2 (+ 6 ASI)

D'après ce tableau, on peut voir que le nombre de tâches complexes auxquelles ont été confrontés les élèves n'est pas le même a priori et lorsqu'on considère le déroulement effectif en classe.

Chez Mme B., les niveaux de mise en fonctionnement les plus difficiles sont plus rares, mais il subsiste tout de même 1 calcul d'intermédiaires et 1 introduction d'étapes sur les 4 applications plus complexes proposées[69].

Chez Mme F. c'est différent : sur les 17 applications plus complexes proposées, seuls 3 restent non simples et non isolées après intervention du professeur, ce qui représente à peine 18% des applications complexes de départ.

[69] L'exercice qui nécessitait l'introduction d'étapes a eu lieu lors d'une séance qui n'a pas été filmée, mais en faisant l'hypothèse de stabilité des pratiques, et au vu de la première séance de module, nous pouvons supposer que le travail des élèves s'est fait en petit groupe, avec des aides individuelles de la part du professeur.

Chez Mme P. enfin, un grand nombre d'applications sont simplifiées, mais il reste tout de même 12 applications non simples et non isolées sur les 15 proposées au départ.

Chez ces trois professeurs, la complexité des énoncés a priori correspond donc plus ou moins aux difficultés potentiellement rencontrées par les élèves en classe.

La gestion des activités des élèves organisée par les professeurs modifie ce que les élèves doivent faire en classe, en terme de complexité. Bien entendu, cela ne change rien lorsqu'il s'agit d'exercices à faire à la maison. En analysant plus finement, nous pouvons voir que certaines séances se prêtent tout de même à la réalisation de tâches plus complexes.

Malgré des énoncés assez difficiles, Mme F. ne fait travailler ses élèves en classe que sur des tâches beaucoup plus simples.

Quant à Mme B., elle simplifie les tâches déjà simples a priori qu'elle propose en classe à ses élèves, mais elle ne change pas vraiment la difficulté des exercices qu'elle propose en module.

Mme P. enfin fait travailler ses élèves globalement sur des tâches certes plus simples que celles qui sont données au départ, mais qui restent d'un certain niveau de complexité.

Type de tâches	Mme B	Mme P	Mme F
en classe a priori **à la charge des élèves**	simples **simples**	complexes **complexes**	complexes **simples**
en ½ classe a priori **à la charge des élèves**	complexes **complexes**	complexes **complexes**	complexes **simples**

Nous souhaitons évidemment comparer ces trois types de gestion, et les mettre en relation avec les résultats des élèves de ces trois classes, pour pouvoir tirer des conclusions sur ce qui pourrait favoriser leurs apprentissages.

Cependant, les différences de niveau des trois classes rendent cette comparaison un peu difficile.

f) L'évaluation finale

Type de tâches	Mme B	Mme P	Mme F
à la charge des élèves en classe	simples	complexes	simples
à la charge des élèves en ½ classe	complexes	complexes	simples
à la maison	simples	complexes	simples ou complexes
en contrôle	**complexes**	**complexes**	**simples**

D'après ce tableau, on peut voir que le rapport entre ce qui est fait en classe et ce qui est évalué n'est pas le même suivant les professeurs. L'écart est très grand chez Mme B., un peu moins chez Mme P., et inexistant chez Mme F., ce qui rend difficile la comparaison des résultats des élèves, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment.

g) Les résultats des élèves

Résultats des élèves	Mme B	Mme P	Mme F
Moyenne de la classe sur 5	2,51 / 5	3,12 / 5	3,67 / 5
Ecart type	1,4	1,22	1,2
Bons/moins bons élèves	différentiation importante	peu de mauvais élèves	peu de mauvais élèves

Les résultats des élèves ne sont pas surprenants, compte tenu de ce qui précède. Il est en effet difficile d'interpréter les bons résultats des bonnes classes, et de savoir s'il faut les attribuer à leur niveau déjà bon ou à l'enseignement reçu.

Malgré les disparités des observations qui ont limité notre recherche, nous avons obtenu – en particulier grâce aux analyses fines et aux comparaisons des gestions des activités – des résultats impressionnants sur la stabilité et la cohérence des pratiques des professeurs, sur le chapitre des triangles semblables. Ces résultats confortent les conclusions d'un ensemble d'autres travaux de recherche sur les pratiques enseignantes.

4) Essai de caractérisation des stratégies des trois enseignants

A partir de ces comparaisons, nous définissons trois styles d'enseignement qui nous semblent correspondre – assez grossièrement – aux professeurs observés.

	Mme B.	Mme P.	Mme F.
Niveau de la classe	mauvais	bon	bon
Introduction de la notion	Extension de la notion de triangles isométriques	Réponse à un problème	Cours magistral
tâches a priori	simples	complexes	complexes
activités potentielles	simples	complexes	simples
travail à la maison	peu	travail du simple et du complexe	Complexe mais répétitif
temps de recherche en classe	Un peu, après méthode	Beaucoup, avant méthode	Pas du tout
variété des tâches et NMF	faible	grande	faible
prise en charge des homologues	toujours	parfois	rarement
Evaluation / travail en classe	Plus difficile	Même difficulté	Plus facile
Caractérisation grossière des stratégies d'enseignement	**Privilégie le sens des choses simples, cours progressivement magistral**	**Privilégie le sens**	**Cours magistral**

Ces résultats sont constants par rapport à l'ensemble des séances, ce qui semble indiquer une certaine cohérence des stratégies choisies par chacun des professeurs.

Détaillons maintenant, de manière un peu caricaturale, les styles de cohérence que nous avons dégagés pour ces trois professeurs.

Pour Mme P., nous dirons qu'elle "privilégie le sens" : introduction de la notion comme réponse à un problème, propriétés nouvelles introduites à travers des exercices, autonomie relativement grande pour les élèves et variété des applications.

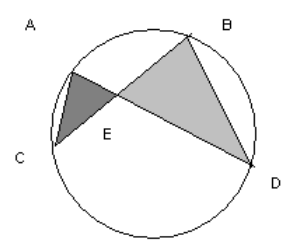
Pour Mme B., il s'agit aussi de donner du sens, mais seulement aux notions les plus simples, au fur et à mesure que les propriétés et les exercices se compliquent, le cours se fait plus magistral. ainsi, seule la première propriété (D'1), la plus utile dans les exercices proposés, est beaucoup travaillée. De même, la prise en charge systématique des homologues permet d'éviter un discours technologique sur la question. Cette stratégie est probablement liée au niveau des élèves de la classe, mais aussi au rapport de Mme B. aux mathématiques.

Pour Mme F. enfin, il s'agit avant tout d'un cours magistral. Peu de temps de silence du professeur et peu d'autonomie pour les élèves en classe, mais beaucoup d'exercices répétitifs à faire à la maison. Le repérage des homologues est à la charge des élèves, mais aucun discours sur la façon de faire n'est donné dans les deux chapitres sur les triangles. Rien ne vise donc particulièrement ici à donner du sens à la notion nouvelle.

Il serait très intéressant pour nous de savoir dans quelle mesure la façon d'enseigner de ces trois professeurs est conditionnée par le niveau de l'établissement, par le type des classes dans lesquelles elles enseignent ou encore par leur expérience ou leur formation.

5) Illustration : comparaison sur un exercice classique posé dans les trois classes

Enoncé :

<table>
<tr>
<td>ABC est un triangle inscrit dans un cercle, D appartient à l'arc BC, (AD) coupe (BC) en E.
1) Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.
2) Montrer que EC x EB = EA x ED</td>
<td rowspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
</table>

Voilà un tableau synthétisant les choix des professeurs quant au moment où ils ont posé cet exercice dans le chapitre, et à la façon dont ils ont géré les activités provoquées.

	Mme B	Mme P	Mme F
Moment	5ème ex / 19 seulement la q°1	5ème / 20 seulement la q°2	- 1er ex / 24 (q°1) - 5ème ex / 24 (q°2)
Temps de recherche	6 min 50 /15min	3 min / 26 min 40	- 0 min 30 / 9 min 30 - 0 min / 3 min 30
Type de travail	en classe	en classe, préparé à la maison	en classe, puis module préparé à la maison
ancien	Pris en charge par les élèves, puis par le professeur	Pris en charge par les élèves	Pris en charge par le professeur puis par les élèves
aides	Méthode (au milieu)	Méthode (à la fin)	Méthode (au début)
contrôle	1 ex similaire		

Pour Mme B. seule la question 1 a été posée, qui constitue alors une application de la similitude relativement simple, et un travail surtout sur l'ancien, pris en charge ici au début par les élèves. La méthode est balisée par le professeur, les élèves l'appliquent ensuite seuls, avant la correction collective. Cet exercice permet un entraînement à l'application de D1 tout en révisant des connaissances plus anciennes.

Mme P. au contraire, a choisi de donner cet exercice en posant seulement la deuxième question, pour obliger les élèves à introduire une étape, et à réaliser un travail sur la similitude en tant qu'outil pour résoudre un problème, mais il n'y a pas beaucoup de travail sur l'angle inscrit. Cet exercice intervient assez tôt dans le chapitre, avec du temps de recherche sur la méthode au début, il peut donner du sens à la notion de triangles semblables en tant qu'outil pour trouver des caractérisations sur les grandeurs des figures géométriques.

Pour Mme F. enfin, cela constitue deux exercices, l'un étant le premier du chapitre, donné juste avec la question 2, et l'autre une application avec introduction d'étapes, quelques séances plus tard. La gestion des activités est telle que le professeur va prendre en charge à la fois l'ancien et la difficulté de l'adaptation de la propriété nouvelle. De plus; les exercices ont été donnés à peu de temps d'intervalle, et il est possible que les élèves reconnaissent la configuration et l'application à effectuer. Cela risque de ne pas donner de sens à la notion de triangles semblables en tant qu'outil.

Sur ce même exercice, donné avec des gestions assez différentes, on voit que les élèves des trois classes n'auront pas eu les mêmes activités potentielles, et donc peut-être pas les mêmes apprentissages.

6) Ce qui pose problème aux élèves de ces trois classes

En analysant les erreurs des élèves au contrôle, nous pouvons voir que deux types de difficultés apparaissent : le repérage des homologues et l'application de certaines propriétés moins travaillées en classe ou seulement dans certaines conditions.

a) Le repérage des homologues

Nous avons vu que dans ces trois classes, les élèves rencontraient des problèmes pour le repérage des homologues. Voyons comment chaque professeur a pris en charge cette difficulté, et quelles sont éventuellement les nuances dans les résultats des élèves aux exercices mettant en jeu cette capacité.

Chez Mme B., l'écriture des homologues les uns en dessous des autres est mise en avant, mais aucune méthode n'est donnée pour réaliser le repérage. C'est donc le professeur qui prend souvent en charge cette étape dans les exercices faits en classe. Au contrôle, les élèves ont du mal à appliquer D'1 lorsque les noms des triangles ne sont pas dans le bon ordre. Par contre, ils réussissent à appliquer P1 "à l'envers" lorsque c'est possible (en s'inspirant du résultat quand il est dans l'énoncé). Pour les ¾ d'entre eux, il semble qu'il n'y ait pas de rapport entre l'écriture proposée et l'ordre des sommets.

Chez Mme P., il n'y a toujours aucun discours sur les homologues, mais la prise en charge du repérage est partagée par le professeur et les élèves (cela dépend des exercices). Au contrôle, l'exercice qui est nettement moins réussi est celui où il faut appliquer P1 et où les homologues ne sont pas facilement identifiables d'après l'expression à démontrer.

Nous aurions pu penser que le fait d'avoir introduit la notion de triangles semblables à l'aide des longueurs dans la première activité aurait pu faciliter le repérage des homologues (il est plus facile en effet d'associer des côtés homologues que des sommets homologues, puisque dans le premier cas il s'agit en fait d'un classement des longueurs des côtés, tandis qu'il est peut-être plus difficile de comparer les mesures des angles). Cependant, ce résultat ne nous permet pas de tirer des conclusions sur ce point.

Chez Mme F. enfin, nous ne trouvons toujours pas de discours sur les homologues, mais toujours cette même écriture conseillée par le professeur. La prise en charge du repérage incombe souvent aux élèves. Au contrôle cependant, l'exercice le moins bien réussi est une fois encore celui qui met en jeu le repérage des homologues, et où les sommets ne sont pas écrits dans le bon ordre, et les homologues pas facile à repérer "à l'envers" à l'aide de l'énoncé. L'échec est cependant minime, et il est difficile de dire si c'est grâce au très bon niveau de la classe, ou bien au fait que les élèves ont eu la charge de cette étape dans les exercices en classe (19 fois sur 23).

Nous avons donc repéré un véritable problème pour les élèves, et il semble que le manque de discours technologique à ce sujet et la prise en charge de cette difficulté par les professeurs ne permettent pas l'apprentissage de cette application, pour une partie plus ou moins grande des élèves en tout cas. Sans doute encore une fois, passer du repérage des sommets (respectivement des côtés) homologues à celui des côtés (respectivement des sommets) homologues ne relève d'une méthode que si on a les transformations similitudes. Autrement cela relève d'un théorème implicite.

b) Le type de travail en classe

Les applications de propriétés qui ont posé problème aux élèves au contrôle sont souvent celles qui n'ont pas été travaillées fréquemment en classe. Chez Mme B., il s'agissait de P2 qui n'avait pas été travaillée en exercice, chez Mme P. il s'agissait de P'1 qui n'avait pas été travaillée non plus. Pour les exercices mettant en jeu ces propriétés au contrôle, les élèves ont eu un peu plus de mal.

Il y a aussi certaines propriétés qui n'ont été travaillées qu'en devoir à la maison ou en module, chez Mme B. par exemple, et qui n'ont été appliquées en contrôle que par les bons élèves. Dans ce cas, il semble qu'il y ait une source de différentiation entre les élèves dans les types de travail des notions en classe : très dirigé en cours, ou au contraire très autonome en module chez Mme B. ou à la maison. Seuls les meilleurs profiteraient du travail le plus autonome. Ou réciproquement, ce sont ceux qui en profitent qui sont les meilleurs. Dans les deux cas, il semble que ce qui est proposé en classe ne suffise pas aux moins bons élèves pour pouvoir progresser. Il faudrait donc envisager une autre gestion du travail individuel, profitable pour tous.

Il semblerait donc d'après ces résultats que le travail optimal en classe, pour l'ensemble des élèves, soit un travail assez répétitif des notions visées. Cependant, à cause des contraintes de temps, ce n'est évidemment pas envisageable pour toutes les notions travaillées en classe, et, on l'a vu, un travail à la maison ne sera pas forcément bénéfique à l'ensemble des élèves.

En général, ce sont les propriétés P'1, P2 et P3 qui ont peu été travaillées en classe. Or P'1 et P3 sont des propriétés des côtés des triangles semblables, et, on l'a déjà évoqué, c'est peut-être à l'aide des côtés des triangles qu'il est plus aisé de faire le repérage des sommets homologues, en classant et en associant les longueurs. Aussi, en privant les élèves d'un travail sur les longueurs, il est possible que les professeurs aient encore aggravé le problème du repérage des homologues pour les élèves.

Ce résultat ne se vérifie cependant pas dans la classe de Mme P., qui a proposé dès le début une activité sur les longueurs des côtés, et qui a fait travailler un peu plus que ses collègues les propriétés P2 et P3. Ses élèves sont pourtant toujours aussi démunis au contrôle devant les exercices qui exigent un repérage des homologues.

Cette comparaison des trois professeurs nous a permis de tirer des conclusions sur les influences du travail en classe sur les apprentissages des élèves, mais ces résultats sont limités à la fois par la disparité entre les trois classes, mais aussi par les contraintes qui pèsent sur les professeurs : institutionnelle, personnelle et sociale, qui expliquent que "tout" n'est pas possible dans une classe pour un professeur donné.

Nous avons aussi soulevé le problème épineux des homologues, sans parvenir à trouver dans ces trois classes de prise en charge efficace, par le professeur, de la difficulté pour les élèves.

Nous allons élargir notre recherche à l'aide de deux autres observations, et voir si nous reconnaissons les stratégies de nos trois professeurs dans les nouveaux cours que nous allons maintenant analyser.

VI) Pour élargir encore : description raisonnée des séances sur le chapitre "triangles semblables"

Nous avons voulu recueillir rapidement des données supplémentaires afin de compléter ces analyses et de confirmer les quelques résultats obtenus. Nous avons donc diffusé une grille descriptive auprès de professeurs de mathématiques, en leur demandant de la diffuser à leur tour.

Par une grande chance, à la suite de la parution d'une partie de nos résultats, des étudiantes de DEA ont choisi d'observer des classes sur le chapitre triangles semblables dans son intégralité, et de nous faire parvenir leurs données.

Grâce à ces quelques informations supplémentaires, nous espérons enrichir nos premières conclusions.

1) Données recueillies et données exploitables 244

a) à partir de notre grille descriptive 244
b) dans le cadre de deux mémoires de DEA 244

2) Analyse du système {contenu + déroulement} pour Mme S. et M. P. 244

a) Mme S. 244
b) M. P. 256

3) Conclusion par rapport aux analyses précédentes 266

1) Données recueillies et données exploitables

a) à partir de notre grille descriptive

Les données recueillies à partir de notre grille d'analyse sont difficilement exploitables, pour plusieurs raisons.

En particulier, la description du déroulement par le professeur de son propre cours est très subjective, en ce qui concerne les temps de recherche ou ce qui reste à faire aux élèves, les professeurs n'ont pas toujours conscience de simplifier la tâche aussi rapidement aux élèves.

D'autre part, les professeurs ne nous ont pas communiqué les résultats de leurs élèves au contrôle, ce qui ne nous permet pas d'interpréter le lien entre ce qui a été fait en classe et la réussite des élèves.

Nous avons tout de même relevé les données qui nous étaient fournies, à titre d'élargissement de la palette des possibles sur le chapitre des triangles semblables.

b) dans le cadre de deux mémoires de DEA

A la suite de la parution du cahier rouge DIDIREM n°47 (Horoks, 2004) dans lequel figuraient notre problématique, notre méthodologie et les analyses de la classe de Mme B., deux étudiantes[70] de DEA à l'université Paris 7 ont choisi d'observer elles aussi les professeurs sur tout le chapitre "triangles semblables". Les données ainsi recueillies sont pour nous facilement utilisables, et nous les avons donc exploitées de la même manière que nos propres observations.

Nous allons donc exposer ici les tableaux d'analyse et leur interprétation pour deux nouveaux professeurs : Mme S. et M. P.

2) Analyse du système {contenu + déroulement} pour Mme S. et M. P.

a) Mme S.

- Présentation de Mme S. et des séances analysées

Mme S enseigne dans un lycée de niveau assez moyen, dans une classe plutôt motivée.

[70] Fabienne CISSE et Monique CORLAY, qui m'ont fourni des données précieuses, pour lesquelles je les remercie infiniment !

Quatre séances ont eu lieu sur es triangles semblables. La notion a été introduite lors de la première séance avec trois activités de recherche, pour lesquelles les élèves disposaient de 8 minutes de recherche individuelle, pour chacune. Ces activités débouchaient sur la définition D1 donnée par le professeur.

La propriété P1 est donnée et démontrée lors de la 2ème séance, son énoncé est légèrement différent de ce qu'on a pu voir dans les autres classes : ce sont "les côtés opposés aux angles égaux" qui sont proportionnels. C'est la première fois que l'on trouve dans le cours une proposition pour le repérage des homologues (ici il s'agit des côtés en fonction des angles, mais on peut aussi imaginer le contraire).

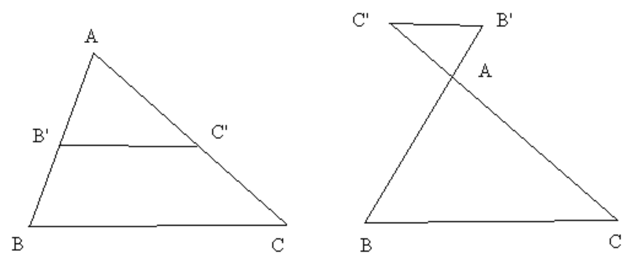
Les propriétés P'1 et P2 sont données sans démonstration à la suite de P1.

Les différents exercices proposés aux élèves au cours de ces séances sont analysés dans le paragraphe suivant.

- analyse des tâches a priori

- 1ère séance

activité 1 *voici deux configurations de Thalès où B'∈ (AB), C' ∈ (AC) et (B'C') // (BC)* *comparer dans chaque cas les angles des triangles ABC et A'B'C'* *(figure fournie)*



Pour cet exercice, il faut travailler sur les angles définis par deux droites parallèles et une sécante.

Les cas de figure sont donnés par l'énoncé.

activité 2

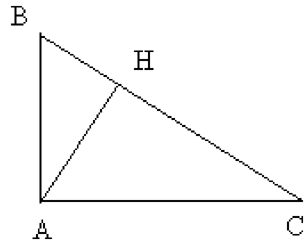
ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A

Comparer les angles des triangles :

a) ABC et ABH

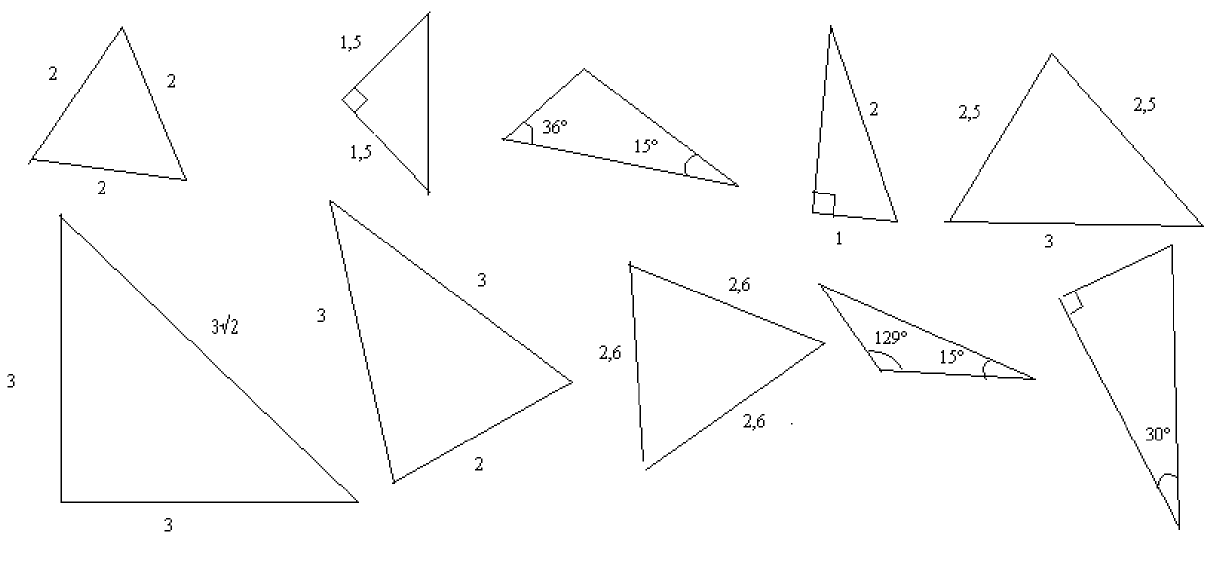
b) ABC et ACH

(figure fournie)



Ici il faut faire un travail sur les angles complémentaires dans les trois triangles de la figure. ABH, ACH et ABC. Cela donne les égalités d'angles.

Activité 3

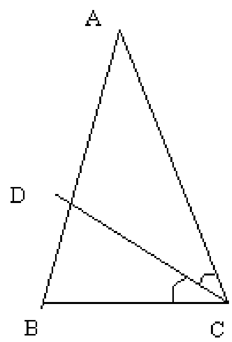


Parmi ces triangles, lesquels sont de même forme ? justifier.

Dans cet exercice il faut calculer les données manquantes pour chaque triangle afin de pouvoir les comparer. Les critères de comparaison des figures de même forme sont plutôt intuitifs, ils ne sont pas donnés aux élèves avant l'exercice.

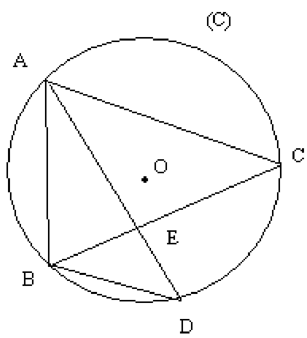
- $2^{ème}$ séance

exercice 1 *ABC est un triangle isocèle en A tel que B = 72°* *La bissectrice de l'angle C coupe [AB] en D* *Démontrer que les triangles ABC et CDB sont semblables* *(la figure est fournie)*



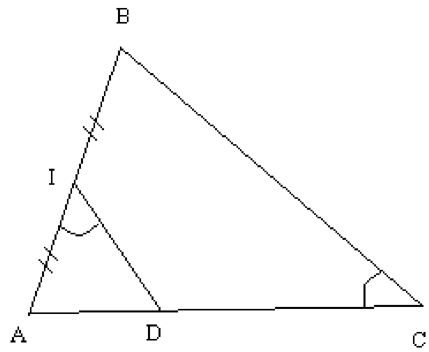
Il s'agit ici d'une application simple de la définition D'1, les triangles sont emboîtés mais leurs noms sont écrits dans le bon ordre.

exercice 2 *(C) est un cercle de centre O, ABC un triangle ayant trois angles aigus inscrits dans (C), D est un point de l'arc BC ne contenant pas A.La droite (AD) coupe le segment [BC] en E.* *démontrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.* *(figure fournie)*



Il faut appliquer ici D'1 après un calcul d'intermédiaire faisant intervenir le théorème de l'angle inscrit. Les noms des triangles sont donnés dans le bon ordre.

exercice 3 *ABC est un triangle, AB = 28 mm, BC = 39 mm et AC = 42 mm. I est le milieu de [AB]. On note D le point de [AC] tel que AID = ACB* *a) calculer AI et AD* *b) démontrer que aire (AID) / aire (ABC) = 1/9* *(figure fournie)*



Ici la similitude n'est pas indiquée, mais il faut démontrer que les triangles AID et ACB sont semblables, en utilisant D'1, pour pouvoir ensuite calculer les longueurs demandées à l'aide de P1.

On utilise ensuite P2 pour comparer les aires.

La difficulté de l'introduction d'étape sera ici prise en charge par le professeur, et les élèves réaliseront une application sur les triangles semblables, et non la résolution d'un problème à l'aide des triangles semblables. Il reste cependant à repérer les homologues, ce qui semble poser des difficultés aux élèves lors de la correction.

exercice 27 *Deux triangles rectangles isocèles sont toujours de même forme. Pourquoi ?*

exercice 28

Deux triangles équilatéraux sont toujours de même forme. Pourquoi ?

Ces deux exercices ressemblent un peu à la 3ème activité d'introduction. Il faut justifier de l'égalité de deux angles et appliquer D'1.

exercice 50

Dans le triangle ABC, la bissectrice de l'angle A coupe [BC] en I.

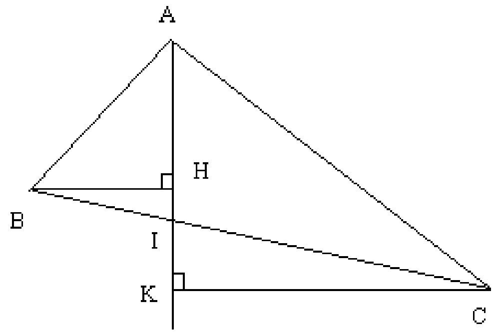
Le perpendiculaire à (AI) issue de B coupe (AI) en H, le perpendiculaire à (AI) issue de C coupe (AI) en K.

a) démontrer que les triangles ACK et ABH sont de même forme

b) démontrer que les triangles IKC et IHB sont de même forme

c) en déduire que IB / IC = AB / AC

(figure fournie)

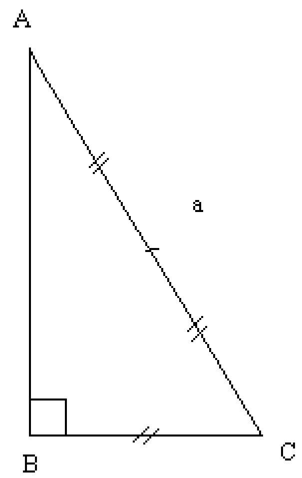


La première question se résout à l'aide d'une application simple de D'1, les noms des triangles étant écrits dans le bon ordre. Idem pour la deuxième question.

On déduit la dernière question à l'aide de P1 et en combinant les égalités de rapports.

exercice 29

ABC est un triangle rectangle qui est un demi-triangle équilatéral. Son hypoténuse [AC] mesure a. A'B'C' est un triangle de même forme avec la correspondance A ↔ A', B ↔ B', C ↔ C' et A'C' = 3a Calculer les longueurs des côtés de ABC et ceux de A'B'C' ainsi que les aires de ces deux triangles en fonction de a.



La figure n'étant pas fournie dans l'énoncé, il vaut mieux commencer par faire un dessin. D'après P1 les longueurs du triangle A'B'C' valent le triple de celles de ABC. Il reste donc à exprimer les longueurs de ABC à l'aide de a et du théorème de Pythagore. En notant x la longueur AB, on a

$x^2 + (a / 2)^2 = a^2$, ce qui nous donne $x = a\sqrt{3} / 2$. On en déduit les côtés de A'B'C'. la difficulté ici porte plutôt sur la résolution algébrique que sur l'application des triangles semblables.

théorème de Ptolémée

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans le cercle Γ, comme le montre la figure ci-contre.

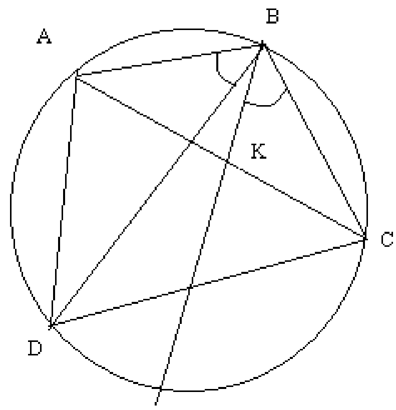
K est le point du segment [AC] tel que ABD = KBC.

a) montrer que les triangles ABD et KBC sont semblables.

En déduire l'égalité AD x BC = KC x BD

b) de la même façon, trouver un produit égal à AB x CD, en montrant que les triangles ABK et DBC sont semblables.

c) en déduire le théorème de Ptolémée : "si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, alors le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés".



La première question est une application de D'1 + P1. Les noms des triangles sont donnés une fois de plus dans le bon ordre, il faut utiliser le théorème de l'angle inscrit, "classique" dans cette configuration, pour démontrer l'égalité des angles.

Dans la deuxième question, il s'agit encore de D'1 + P1 avec les triangles dans le bon ordre. L'égalité des angles découle encore du théorème de l'angle inscrit.

On conclut en combinant les deux résultats.

Il s'agit d'une propriété intéressante, mais le fait que la similitude ait été un outil pour la démontrer n'est pas forcément mis en avant par le découpage des questions.

- Tableau récapitulatif des tâches en classe et de leur déroulement

Pour analyser le déroulement, nous n'avons pas autant de données que pour les autres professeurs, car nous n'avons pas vu ici les vidéos. Nous disposons cependant de grilles d'analyses dans lesquelles sont portées certaines des informations qui nous intéressent.

ex	**Conf**	**Connaissances**			**NMF**	**Déroulement**			
		Anciennes		**Nouv**		**Tps silence**	**Aides du professeur**		
							Nature	**Moment**	**Forme**
1	2 Δ emb	Somme des angles d'un triangle	-	D'1	intermédiaires	4 min	-	-	-
2	cercle	Angle inscrit	-	D'1	intermédiaires	0 min préparé à la maison	-	-	module
3	2 Δ emb	-	-	D'1 puis P1	étapes	6 min + 3 min + 4 min	Sur NMF Sur Δ semb	Après tps de recherche	Module Questions - réponses
		-	-	P2	Reconnaissance des modalités	6 min			
27	2 Δ	-	-	D'1	intermédiaires	0 min 30	Sur méthode	Dès le début	Module Questions de plus en plus fermées
28	2 Δ	-	-	D'1	intermédiaires	-	Sur méthode	Dès le début	Module Questions de plus en plus fermées
50	2 Δ	-	-	D'1	Reconnaissance des modalités	2 min	-	-	Module Aides individuelles
		-	-	P1	Reconnaissance des modalités	Terminé à la maison	-	-	-
29	2 Δ	Pythagore	-	P1 puis P2	intermédiaires	0 min	Sur méthode		
pto	cercle	Angle inscrit	-	D'1 puis P1 2 fois	intermédiaires	5 min + 4 min + 4 min	Sur méthode	Après tps de recherche	Questions sur ce qu'il faut faire

- l'évaluation finale

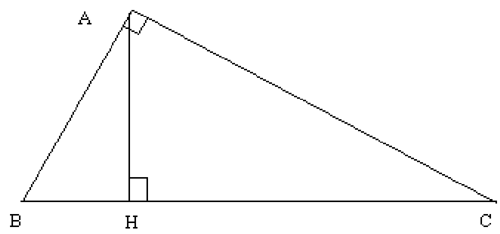
Les exercices du contrôle étaient imposés par les chercheurs. Les professeurs observés gardaient tout de même le choix de l'ordre des exercices et de la durée de l'examen.

exercice 1

le triangle ABC est un triangle rectangle en A et les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires. BH = 1 et HC = 5.

a) démontrer que les triangles ABH et ABC sont semblables

b) en déduire AB



Application simple de D'1 + P1, dans une configuration déjà étudiée. Cependant pour la première fois les sommets homologues ne sont pas dans le bon ordre. Et les triangles sont emboîtés.

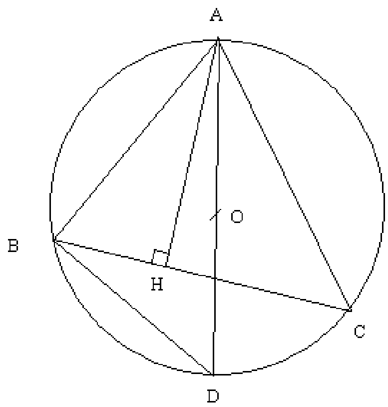
exercice 2

(C) est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans (C) tel que l'angle BAC soit aigu. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).

a) démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables

b) on pose AB = c, AC = b et AH = h, déduire de la question précédente que bc = 2rh

c) on pose BC = a et on appelle s l'aire du triangle ABC, démontrer que abc = 4rs



Application de D'1 + P1, suivie de manipulation d'expressions algébriques. Cette fois-ci les sommets sont donnés dans le bon ordre. La question b) aurait pu être retirée de l'énoncé, mais telle quelle, elle permet de simplifier la difficulté des trois produits au lieu de deux, déjà évoquée dans nos analyses.

Voici le tableau récapitulatif pour ce devoir en classe :

ex		**Conf**	**Connaissances qui fonctionnent**			**NMF**
			Anciennes		**Nveau**	
1	**1)**	2 Δ emboîtés	-	-	D'1	reconnaissance des modalités d'application
	2)		-	-	P1	reconnaissance des modalités d'application
2	**1)**	cercle, 2 Δ emboîtés	Angles inscrits Δ rect et cercle	-	D'1	Calcul d'intermédiaires
	2)		-	algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application

Les propriétés qui sont contrôlées ici sont celles qui ont été le plus souvent abordées en classe (5 fois D'1 seule, 2 fois P1 et 3 fois D'1 + P1 sur les 11 applications proposées).

Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances demandées ici n'est pas très difficile : sur les 4 applications 3 nécessitent une reconnaissance des modalités et 1 seule un calcul d'intermédiaires, alors qu'en classe les élèves ont eu à réaliser 7 fois des applications de NMF supérieur ou égal au calcul d'intermédiaires, et seulement 3 fois une reconnaissance simple des modalités d'application.

Les configurations ne sont pas simples, et dans le premier exercice, les sommets sont donnés dans le désordre pour la première fois dans un exercice.

Les connaissances anciennes qui interviennent dans le deuxième exercice peuvent poser problème aux élèves, car l'une d'entre elle n'a pas été vue en classe dans ce chapitre. Voyons comment ces exercices ont été réussis par les élèves.

- tableau comparatif contrôle – cours et résultats des élèves

ex	config	comparaison des connaissances anciennes intervenant		même nveau	NMF en classe par rapport à celui de contrôle	type de travail en classe	types d'aides	résultats des élèves	
								reconnaissance de la propriété à appliquer	application correcte
		avant	après					TOTAL / abordé	TOTAL
1 1)	la même (ex 1)	-	-	D'1	Plus difficile	long tps recherche en classe (4 min)	-	25 / 32	17
1 2)	la même (ex 3)	-	-	P1	plus difficile	long de tps recherche en classe	Sur méthode après et avant tps recherche	7 / 21	5
2 1)	Différente (pto : Δ non emb)	la même sauf Δ rect et cercle	-	D'1	identique	long tps recherche en classe	Sur méthode après et avant tps recherche	14 / 31	10
2 2)	Différente (pto : Δ non emb)		Pas d'alg	P1	plus difficile	long de tps recherche en classe	Sur méthode après et avant tps recherche	17 / 22	12

D'après ce tableau, il semble que le travail réalisé en classe sur ces notions était plus complexe que celui évalué au contrôle. Cependant, certaines questions n'ont pas été très bien réussies par les élèves. Les premières questions de chaque exercice ont été abordées par un grand nombre d'élèves, et les questions suivantes nous montrent que beaucoup ont abandonné en cours de route. Les résultats des élèves au contrôle sont globalement médiocres : à peine 1/3 de bonnes réponses en moyenne.

Dans le premier exercice, la question 1) a été réussie par 17 élèves sur les 32 qui l'avaient abordée, 8 autres élèves ont reconnu la propriété à appliquer, mais n'ont pas su réaliser correctement son application. Pour la question 2), il y a beaucoup moins de bonnes réponses, il y a même moins d'élèves ayant abordé la question. Comment expliquer cet échec pour appliquer P1 à la suite de D'1, alors que cette application avait été vue 4 fois dans le cours, dans des exercices plus complexes et avec des initiatives laissées aux élèves ? Il est probable que le fait que les noms des triangles soient pour la première fois donnés dans le désordre ait perturbé les élèves, et les ait empêchés de terminer l'exercice.

Le deuxième exercice n'a pas été très bien réussi non plus : mais cette fois-ci c'est la deuxième question qui a remporté le plus de bonnes réponses ! Il fallait ici aussi appliquer D'1 puis P1, dans une configuration où les triangles étaient emboîtés, mais où les noms des triangles étaient dans le bon ordre. Il semblerait que cela ait permis à certains élèves de trouver l'égalité demandée sans pour autant avoir prouvé la similitude et trouvé les sommets homologues.

Dans cette classe, nous pouvons voir que malgré un travail en classe avec de longs temps de recherche, la réussite des élèves à des exercices plus faciles en contrôle n'est pas assurée. En particulier, le repérage des homologues est problématique pour les élèves, surtout lorsque les noms des triangles ne sont pas donnés dans le bon ordre.

b) M. P.

- présentation de M. P. et des séances analysées

M. P. enseigne dans un établissement de niveau plutôt moyen.

Le chapitre correspondant aux triangles semblables est traité en 5 séances, il a été interrompu 2 semaines après les trois premières séances, pour un arrêt maladie du professeur, puis deux semaines à nouveau par les vacances scolaires après la 4ème séance, et enfin la dernière séance a eu lieu après les vacances, la veille du contrôle.

La notion nouvelle et les différentes propriétés ont été introduites par un cours magistral lors de la première séance.

- analyse a priori des exercices faits en classe

- 1ère séance

Cette séance est cours magistral dans lequel le professeur a donné toutes les propriétés nouvelles du cours.

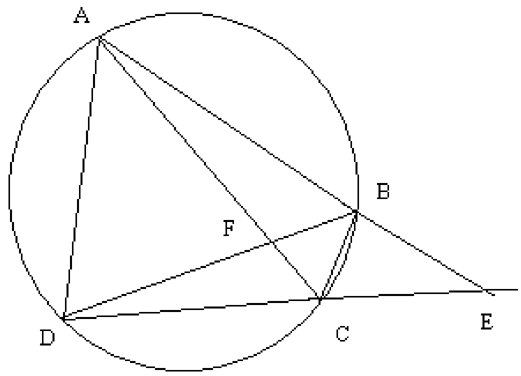
- 2ème séance (module)

exercice 7.8

a) démontrer que dans la figure ci-contre ABF et DCF sont semblables

b) même question avec AEC et DEB

c) en déduire que EB x EA = EC x ED et FA x FC = FD x FB



La première question se démontre à l'aide de D'1 et du théorème de l'angle inscrit, et nécessite un calcul d'intermédiaires. Les noms des triangles sont écrits dans le bon ordre. La deuxième question se résout de la même manière. Il faut utiliser P1 pour en déduire la troisième question.

Cet exercice se prolonge en une question supplémentaire à résoudre à la maison : "*en utilisant les triangles semblables, montrer que $MT^2 = MA \times MB$*", question qui sera reprise plus tard avec des questions intermédiaires dans l'exercice 7.10.

- 3ème séance

exercice 7.7

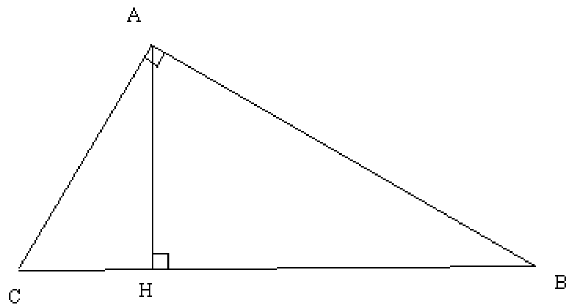
ABC est un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur relative à l'hypoténuse

a) montrer que les trois triangles ABC, HBA et HAC sont semblables

b) en déduire les relations $AB^2 = BC \times BH$, $AC^2 = CB \times CH$ et $AH^2 = HB \times HC$

c) calculer $AB^2 + AC^2$

d) pouvait-on le démontrer en 3ème ?



Dans cet exercice il faut prouver la similitude à l'aide de D'1 et d'un calcul sur les angles complémentaires, les noms des triangles étant écrits dans le bon ordre. La question suivante se déduit à l'aide de P1. La suite permet de re-démontrer à l'aide de calculs littéraux la théorème de Pythagore.

- $4^{\text{ème}}$ séance

exercice 7.9

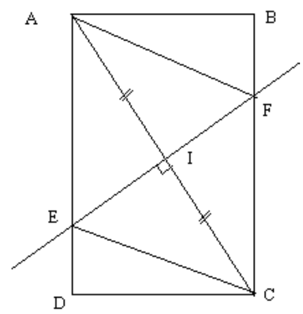
ABCD est un rectangle, I est le milieu de [AC].

La médiatrice de [AC] coupe respectivement les côtés [AD] et [BC] en E et F.

a) que peut-on dire du quadrilatère AFCE ?

b) montrer que les triangles CIF et CBA sont semblables

c) on pose AB = 3 cm, BC = 12 cm. Calculer AC



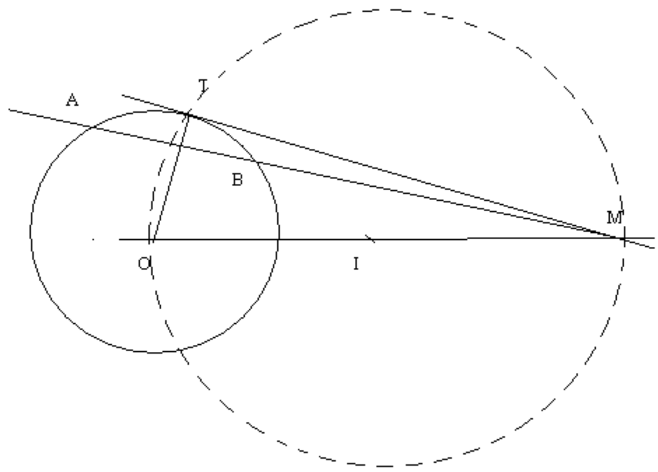
Il faut reconnaître un losange. On peut montrer en effet que le quadrilatère AFCE a ses angles opposés de même mesure : EAI = ICF et AEI = IFC (angles alternes-internes) et AEI = IEC (la droite (EI) est à la fois la médiatrice et la bissectrice dans le triangle AEC isocèle en E), donc EAF = FCD et AEC = CFA. De plus AFCE a des diagonales perpendiculaires, donc c'est un losange.

On pouvait aussi utiliser ici les triangles isométriques, il est facile en effet de montrer que EIA et FIC sont isométriques, car ils ont un côté égal (AI = IC) et deux angles égaux (AIE = FIC et IAE = ICF), on en déduit que AE = FC, ce qui nous donne, sachant que AE = EC et CF = FA, un quadrilatère avec quatre côtés égaux, donc un losange.

Pour la deuxième question, on utilise D'1, les deux triangles ayant un angle commun et un angle droit. On en déduit la longueur demandée dans la dernière question à l'aide de P1.

- 5^{me} séance

exercice 7.10
soit un cercle de centre O, une sécante passant par M qui coupe le cercle en A et B, le cercle de diamètre OM recoupe le précédent cercle en T.
en utilisant les triangles semblables, montrer que $MT^2 = MA \times MB$
1) démontrer que la droite (TM) est tangente au cercle
2) démontrer que les triangles ATM et BTM sont semblables



On utilise dans cette question la propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle pour prouver que T et (IO) sont perpendiculaires, et donc que T est une tangente au cercle.

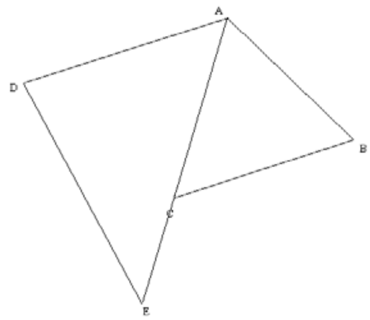
Dans la question suivante, on utilise des calculs d'angles pour démontrer la similitude à l'aide de D'1. On montre que TBA = ½ TOA grâce au théorème de l'angle au centre, et d'autre part OTA et ATM sont complémentaires, et OTA = (180° - TOA)/2 en faisant la somme des angles du triangle isocèle TOA ; tout cela nous donne finalement ATM = ½ TOA, donc les angles ATM et TBA sont égaux. Finalement les deux triangles ont un angle commun et un angle égal, donc ils sont semblables. On en déduit enfin l'égalité demandée grâce à P1.

Dans cet exercice, les calculs d'angles nécessitent une introduction d'étapes. Les triangles semblables sont ici un outil permettant de démontrer des propriétés des longueurs dans une configuration particulière.

exercice 7.11

construire deux triangles ABC et ADE de telle manière que B et D n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (AE), le point C appartient à [AE], AB = 4 cm, BC = 5 cm, AC = AD = 6 cm, AE = 9 cm, DE = 7,5 cm

démontrer que la droite (AE) est bissectrice de BAD



Il faut montrer ici que les deux triangles sont semblables à l'aide de P'1, en effet, les rapports de longueurs sont égaux : AB / AD = BC / DE = AC / AE = 2/3. D'après la définition, les angles DAC et BAE sont égaux, donc (AE) est bien la bissectrice de l'angle DAB.

Dans cet exercice, la similitude n'était pas indiquée. Il appartient donc aux élèves de l'introduire comme un outil pour résoudre la question posée.

exercice 7.12

la salle mesure 6 m sur 8 m sur 2,5 m. Calculer la distance entre deux points opposés.

Il s'agit d'une révision du théorème de Pythagore.

- tableau récapitulatif des tâches en classe et de leur déroulement

M. P. donne toujours la méthode à suivre en début d'exercice, puis laisse du temps aux élèves pour résoudre. Ainsi, même si les élèves bénéficient de longs temps de recherche (30% du temps des séances selon les chercheurs), c'est souvent pour réaliser des tâches simples, balisées par le professeur.

Les propriétés P3 et P2 ne sont pas travaillées en classe dans les exercices proposés, tandis que D'1 et P1 sont travaillées 5 fois chacune. Les niveaux de mise en fonctionnement des exercices sont souvent simples (5 reconnaissances des modalités) et parfois très complexes (1 introduction d'étapes, 1 nécessité de faire des choix), mais tous les cas le professeur aide les élèves à élaborer la méthode.

ex	**Conf**	**Connaissances**			**NMF**	**Déroulement**			
		Anciennes		**Nouv**		**Tps silence**	**Aides du professeur**		
							Nature	**Moment**	**Forme**
7.8 1)	cercle	Angle inscrit	-	D'1 2 fois	intermédiaires	0 min + 5 min	méthode	Dès le début puis après tps recherche	Questions de plus en plus fermées ASI
2)		-	-	P1 2 fois	Reconnaissance des modalités	4 min 30	méthode	début	module
7.7	2 Δ emb	-	-	D'1	Reconnaissance des modalités	0 min	Sur méthode Sur Δ semb	Dès le début	Questions fermées
		-	-	P1	Reconnaissance des modalités	2 min			Questions fermées
7.9	//gramme	Angles et // //gramme Δ isométriques	Pythagore	D'1	choix	9 min 40	Sur méthode	A la fin	Questions de plus en plus fermées
		-	Calcul littéral	P1	Reconnaissance des modalités	7 min			
7.10	cercle	Angle au centre, somme des angles d'un triangle, calcul littéral		D'1 + P1	étapes, cadre	? (non filmé)	?	?	?
7.11	2 Δ	-	-	P'1 puis D1	Reconnaissance des modalités	? (non filmé)	?	?	?

- l'évaluation finale

M. P. a donné en contrôle les mêmes deux exercices que ceux du contrôle de Mme S. – exercices qui étaient imposés par les chercheurs – mais il a choisi à la dernière minute d'en rajouter deux autres dans son énoncé. Nous donnons les quatre exercices en question dans l'ordre de l'énoncé.

exercice 1

Citer trois propriétés caractéristiques des triangles semblables

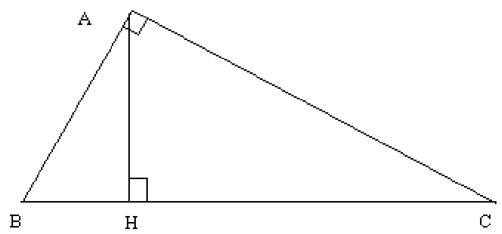
Il s'agit ici d'une question de cours.

exercice 2

le triangle ABC est un triangle rectangle en A et les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires. BH = 1 et HC = 5.

a) démontrer que les triangles ABH et ABC sont semblables

b) en déduire AB



Application simple de D'1 + P1. Les sommets homologues ne sont pas dans le bon ordre, et les triangles sont emboîtés.

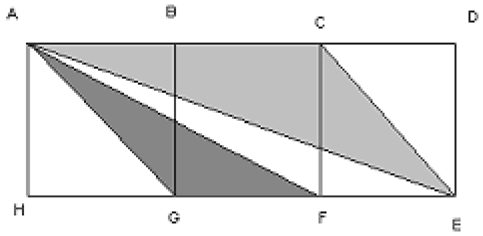
exercice 3

Dans la figure, le rectangle DAEH a été décomposé en trois carrés isométriques de côté 1

1) calculer AG, AE, CE et AF (donner la valeur exacte)

2) en déduire que les triangles CEA et GFA sont semblables

3) calculer alors le rapport de leurs aires



Dans cet exercice, la première question se résout à l'aide du théorème de Pythagore, et la suivante à l'aide de P'1, une fois associés les côtés homologues. On aurait pu aussi se contenter de calculer AG (qui est égal à CE) et d'utiliser P3 pour démontrer la similitude, mais le fait de faire calculer les 3 longueurs à la question précédente incite plus à utiliser P1..

La troisième question peut se faire à l'aide de la formule de l'aire d'un triangle :

aire de ACE = AC x DE / 2 = 1 et aire de AGF = GF x AH / 2 = 1/2.

Elle se fait plus rapidement encore à l'aide de P2.

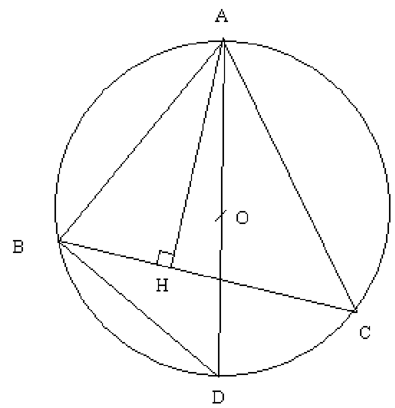
exercice 4

(C) est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans (C) tel que l'angle BAC soit aigu. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).

a) démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables

b) on pose AB = c, AC = b et AH = h, déduire de la question précédente que bc = 2rh

c) on pose BC = a et on appelle s l'aire du triangle ABC, démontrer que abc = 4rs



Application de D'1 + P1, suivie de manipulation d'expressions algébriques. Les sommets sont donnés dans le bon ordre.

Voilà le bilan des tâches pour ce devoir. Nous n'avons pas pris en compte le premier exercice du contrôle : bien qu'il porte sur les triangles semblables, il ne s'agit pas d'une adaptation des propriétés du cours, mais d'un exercice faisant appel à la mémoire des élèves.

ex	Conf	**Connaissances qui fonctionnent**			**NMF**
		Anciennes		**Nveau**	
2 1)	Δ emboîtés	-	-	D'1	reconnaissance des modalités d'application
2)		-	-	P1	reconnaissance des modalités d'application
3 2)	2 Δ	Pythagore	-	P'1	reconnaissance des modalités d'application
3)		-	Racine carrée	P2	reconnaissance des modalités d'application
4 1)	Cercle et Δ emboîtés	Angles inscrits Δ rect et cercle	-	D'1	Calcul d'intermédiaires
2)		-	algèbre	P1	reconnaissance des modalités d'application

L'exercice rajouté par le professeur fait travailler la propriété P'1 qui a été vue lors de la dernière séance avant le contrôle, séance que les chercheurs n'ont pas pu filmer. Les propriétés P2 et P3 n'ont pas été mises en application lors des exercices faits en classe, mais uniquement données dans le cours de la première séance.

- tableau comparatif contrôle/classe et interprétation

ex	**config**	**comparaison des connaissances anciennes intervenant**		**même nveau**	**NMF en classe par rapport à celui de contrôle**	**type de travail en classe**	**types d'aides**	**résultats des élèves**	
		avant	**après**					**reconnaissance de la propriété à appliquer**	**application correcte**
								TOTAL/abordé	TOTAL
2 1)	la même (ex 7.7)	-	-	D'1	identique	tps résolution en classe (5 min) après balisage de la tâche	méthode	23 / 24	18
2 2)	la même (ex 7.7)	-	-	P1	identique	tps recherche en classe (2 min)	méthode	3	1
3 2)	Différente (ex 7.11)	Différente (ici Pythagore)	-	P'1	identique	(non filmé)	(non filmé)	16/23	4
3 3)	(Pas d'ex sur P2)	-	-	P2	-	-	-	3/4	1
4 1)	La même (ex 7.8q°1)	Sauf Δ rect et cercle	-	D'1	identique	résolution (5 min) après balisage de la tâche	méthode	12/18	6
4 2)	La même (ex 7.8q°2)	-	La même (algèbre)	P1	identique	Tps de résolution en classe (4min30) après balisage de la tâche	méthode	4/4	4

Grâce à la question de cours, nous pouvons tout de même voir si les élèves ont mémorisé les propriétés nouvelles, et en particulier lesquelles ils ont le mieux retenu. Les résultats du contrôle nous montrent que les 2/3 ont retenu correctement la définition D1 et les propriétés D'1 et P1, mais que P3 n'a été donnée que par 1/3 des élèves, et P2 par aucun. Le fait que les propriétés D'1 et P1 ont été travaillées beaucoup plus que les autres dans le cours semble ici compenser le fait qu'elles ont été vues assez longtemps avant le contrôle, puisque ce sont celles qui ont été le mieux retenues par les élèves.

Nous pouvons voir ici que les exercices du contrôle ont été préparés en classe par des applications similaires : dans des configurations identiques et avec des niveaux de mise en fonctionnement analogues. De plus, les niveaux de mise en fonctionnements des exercices du contrôle ne sont pas très complexes (5 reconnaissances des modalités et un calcul d'intermédiaire).

Malgré tout, les résultats des élèves sont très médiocres. La question la mieux réussie par les élèves est la première de l'exercice 2 (18 bonnes réponses), dans laquelle il fallait appliquer D'1 et qui avait été préparée par l'exercice 7.7, un peu plus difficile car les noms des triangles semblables n'y étaient pas indiqués. Cependant un seul élève a réussi la question suivante. Il est vrai que les élèves ont été habitués à déduire des égalités de produits de longueurs, et n'ont pas fait d'application numérique en classe à l'aide de P1. Il est possible que les élèves n'aient pas reconnu ici l'utilité d'appliquer P1, qui ne leur avait servi jusqu'à présent que pour déduire des expressions de forme très particulière et très reconnaissable (égalité de deux produits).

L'exercice 3 a été plutôt raté, même si au début l'application du théorème de Pythagore – révisée la veille – a été réussie par 28 élèves. Il y a 16 élèves qui ont bien reconnu la propriété à appliquer dans la deuxième question (P'1), mais seuls 4 l'ont appliquée correctement. La troisième question n'a été réussie que par un seul élève, ce qui n'est pas surprenant, étant donné que P2 n'avait pas été appliquée une seule fois dans les exercices proposés en classe. Un autre élève a d'ailleurs résolu cette question sans utiliser P2, et en calculant les aires des deux triangles.

Petite anecdote : cet exercice avait été donné lors du concours kangourou des mathématiques peu de temps auparavant, et quelques élèves ont demandé au professeur lors du contrôle s'ils pouvaient résoudre sans les triangles semblables, puisqu'ils n'avaient pas utilisé la similitude lors du concours ! Il semble donc que parfois, la méthode de résolution à l'aide des similitudes ne soit pas celle qui vienne en premier à l'esprit des élèves. Y a-t-il en effet généralement d'autres méthodes possibles ? Nous nous penchons sur cette question dans le chapitre 7.

Enfin, l'exercice 4 n'a pas remporté lui non plus un franc succès. Encore une fois, si la première question (application de D'1) a été réussie par 6 élèves, 4 ont réussi la question suivante (application de P1), et un seul la dernière question, où il fallait démontrer l'égalité de trois produits, en utilisant seulement la formule de l'aide du triangle. Ces échecs sont peut-être liés aussi au fait que cet exercice était le dernier du contrôle.

A partir des résultats de ce contrôle, et de la comparaison avec ce qui a été fait en classe auparavant, nous pouvons voir que ces élèves, qui n'ont eu qu'à réaliser des tâches simples et isolées dans les exercices en classe, ne sont pas performants en contrôle lorsqu'il s'agit d'utiliser la question 1) pour résoudre la question 2). Il semblerait donc ici que le découpage des tâches et le manque d'autonomie nuisent aux apprentissages des élèves. De plus, le fait que ces deuxièmes questions, souvent ratées, nécessitent souvent le repérage des homologues n'est certainement pas un hasard…

Nous pouvons voir aussi que d'autres méthodes que la similitude existent parfois pour résoudre les exercices de ce chapitre, et que les élèves les utilisent assez volontiers pour résoudre.

Il ne faut pas oublier cependant que ce chapitre n'a pas été réalisé dans de bonnes conditions (nombreuses interruptions) ; il est alors possible que les élèves aient oublié les triangles semblables entre-temps, ce qui semble justifié par leurs faibles résultats à la question de cours du contrôle.

3) Conclusion par rapport aux analyses précédentes

Ces deux analyses supplémentaires, réalisées grâce aux données qui nous ont été généreusement offertes, viennent confirmer certains de nos résultats déjà obtenus.

Si on compare la stratégie d'enseignement de Mme S. à l'une de celles que nous avons définies, elle est assez proche de celle de Mme P. : elle cherche à donner du sens à cette notion nouvelle, à travers des activités d'introduction qui sont des recherches de problème, et des exercices variés avec temps de recherche en classe. Il semble pourtant qu'aucun sens ne soit apporté ici encore aux sommet homologues et à leur repérage.

	Mme S	Mme P.
Niveau de la classe	moyen	bon
Introduction de la notion	Réponse à un problème	Réponse à un problème
Tâches a priori	Assez complexes	complexes
Type de gestion des activités	autonomie	autonomie
Variété des applications proposées	faible	grande
Prise en charge des homologues	toujours	parfois
Niveau du contrôle / ce qui a été fait en classe	Plus simple	analogue
Résultats des élèves au contrôle	mauvais	bons

D'autre part, le fait que la classe de Mme S. soit plus faible que celle de Mme P. nous permet de comparer les effets de leur stratégie commune de recherche du "sens" sur les apprentissages d'élèves de différents niveaux.

Chez Mme S., les résolutions de problèmes en classe, assorties de temps de recherche, ne semblent pas favoriser particulièrement la réussite des élèves au contrôle, pourtant plus facile que ce qui a été fait en classe. Il est donc possible que cette gestion des activités en classe ne soit pas bénéfique aux élèves de niveau un peu moins bon. Nous ne disposons pas de renseignements sur le niveau de chacun des élèves de cette classe, qui nous permettraient de regarder si les notes du contrôle montrent une différentiation plus ou moins marquée entre "bons" et "mauvais" élèves.

Chez Mme P. aussi, cette gestion ne semblait pas suffisante pour assurer l'apprentissage pour tous, ou en tout cas la réussite au contrôle. En particulier, si les élèves sont moins dirigés (par exemple s'il n'y a pas de moments de mise en commun et d'institutionnalisation), il est possible que pour certains élèves, le travail effectué individuellement ne soit pas aussi bénéfique que pour d'autres.

Cela vient confirmer notre hypothèse selon laquelle une certaine gestion des activités profite davantage aux bons élèves, ou encore que c'est parce qu'ils en profitent qu'ils sont meilleurs que les autres.

La stratégie d'enseignement de M. P. se rapprocherait plutôt de celle de Mme F., si ce n'est le temps de recherche en plus, sans autonomie toutefois pour les élèves. Cependant, le niveau de la classe de M. P. est inférieur à celui de la classe de Mme F., et ce type de gestion ne semble pas convenir dans une classe de niveau faible, à en juger par les résultats des élèves au contrôle

	M. P	Mme F.
Niveau de la classe	moyen	très bon
Introduction de la notion	Cours magistral	Cours magistral
Tâches a priori	complexes	complexes
Type de gestion des activités	Pas d'autonomie	Pas d'autonomie
Variété des applications proposées	nulle	faible
Prise en charge des homologues	souvent	rarement
Niveau du contrôle / ce qui a été fait en classe	analogue	Plus simple
Résultats des élèves au contrôle	Très mauvais	Très bons

Ces deux analyses nous apportent donc un complément précieux.

Nous voyons ici encore que ce sont généralement les exercices qui ont été le plus souvent donnés en classe qui sont le mieux réussis ensuite au contrôle, mais qu'en revanche le temps de recherche en classe n'est pas toujours bénéfique, en tout cas pas pour tous. Plus exactement, il semble qu'une autonomie laissée aux élèves en classe ne profite qu'aux bons, mais que ceux-là soient bons parce qu'ils en profitent, ou en profitent parce qu'ils sont bons, nous ne pouvons le dire.

D'autre part, nous pouvons voir encore une fois que le problème des homologues est assez épineux : si les noms des triangles sont toujours donnés dans le bon ordre dans les exercices faits en classe, ou si les élèves n'ont pas la charge du repérage, il semble que la difficulté de ce repérage ne soit pas toujours surmontable pour eux au contrôle.

Nous avons vu dans les trois derniers chapitres comment 5 professeurs faisaient vivre cette notion dans leur classe, et pour élargir encore cette recherche, nous avons voulu savoir ce que l'on pouvait trouver dans les manuels scolaires sur ce chapitre. Ce complément d'analyse vise à comprendre ce qui est proposé aux élèves – et aux professeurs – à plus grande échelle sur les triangles semblables.

Nous avons voulu essayer de caractériser les manuels disponibles pour le programme 2000, en regardant quelles tâches y sont proposées : la complexité et la variété de celles-ci en ce qui concerne le mélange avec les connaissances plus anciennes et la configuration géométrique, et les propriétés qui sont plus particulièrement travaillées dans les pages d'exercices.

Plus spécifiquement, nous nous sommes demandé comment les manuels scolaires prennent en charge la difficulté des homologues. Par exemple, les noms des triangles sont-ils généralement donnés dans le désordre ou bien dans l'ordre, permettant de retrouver plus facilement les sommets homologues ? Et dans le cours, qu'en est-il de la méthode de repérage ?

Enfin, retrouve-ton beaucoup d'exercices où la similitude est une méthode "efficace" pour résoudre, ou bien la plupart des problèmes peuvent-ils être résolus à l'aide d'autres connaissances des élèves, plus anciennes ou non, voire même avec un logiciel de géométrie dynamique ?

Nous allons donc étudier plusieurs manuels de 2^{nde}, et exposer ces analyses dans le chapitre suivant

VII) Analyse des manuels scolaires

De même que nous nous sommes intéressés aux manques éventuels qui pourraient exister dans l'ensemble des tâches proposées par les professeurs à leur classe, nous avons voulu pister ces mêmes manques dans le chapitre "triangles semblables" des principaux manuels de classe de 2^{nde} appliquant le programme de la rentrée 2000. Ces manuels suivent bien entendu les consignes et accompagnements du programme, et nous donnent une assez bonne idée de l'interprétation qui peut en être faite par les enseignants.

1) Les données recueillies 272
2) Le traitement du cours dans les manuels scolaires 273
3) Analyse des exercices des manuels : codage adopté et premiers résultats 276
4) Comparaison des exercices des manuels : histogrammes obtenus grâce aux tris à plat 281
   a) les configurations des figures étudiées 282
   b) le travail du nouveau 283
   c) le mélange ancien – nouveau 284
   d) mélange avec l'algèbre 285
   e) le mélange avec la géométrie pure et la géométrie calculatoire 285
   f) e) le niveau de mise en fonctionnement 288
5) Spécificité du travail proposé sur les triangles semblables 290
   a) configurations pour le travail du nouveau 291
   b) mélange ancien-nouveau et configuration 292
   c) configuration et algèbre 293
   d) niveau de mise en fonctionnement et configuration 294
   e) niveau de mise en fonctionnement et mélange ancien-nouveau 295
   f) niveau de mise en fonctionnement et propriétés nouvelles 296
6) Le traitement des homologues dans les exercices 297
7) Analyse factorielle 302
8) L'outil triangles semblables 308
   a) types de problèmes et autres méthodes 308
   b) Résolution avec un logiciel de géométrie dynamique 317
9) Conclusion 328

1) Les données recueillies

Nous nous sommes intéressés au chapitre "triangles semblables" de 12 manuels de 2^{nde} édités conformément au programme de la rentrée 2000, ce qui représente la quasi-totalité de l'offre faite aux professeurs cette année-là.

Nous avons choisi d'analyser les manuels suivants :

Transmath	Déclic	Belin
Pythagore	Breal	Delagrave
Pyramide	Indices	Hyperbole
Fractale	Dimathème	Point

Dans un premier temps, nous avons analysé la partie cours de ces manuels, en regardant le lien qui y est fait avec le chapitre sur les triangles isométriques, les activités introductrices sur les triangles semblables, mais aussi les démonstrations qui sont proposées et enfin la façon dont les homologues sont traités dans le cours. Ces résultats sont exposés plus loin dans ce chapitre.

Nous avons aussi relevé la liste exhaustive des tâches proposées à travers les 356 exercices que nous y avons trouvés, et les avons analysées suivant les mêmes critères que ceux utilisés pour les énoncés des professeurs. Pour réaliser cette analyse, nous avons considéré les exercices trouvés dans ces différents manuels, mais aussi ceux que nous avons relevés lors de nos séances en classe. Pour chaque exercice, nous avons tenu compte, une fois de plus, de la configuration dans laquelle il se situait, des connaissances anciennes et nouvelles qui intervenaient, de l'ordre des homologues s'il était donné, et enfin du niveau de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles. Le tableau suivant résume le codage que nous avons effectué pour pouvoir analyser nos exercices.

Nous avons choisi d'analyser le traitement des homologues à part, afin de dégager les spécificités de chaque manuel, mais aussi de voir ce qui est proposé pour surmonter les difficultés que nous avons mises à jour dans les chapitres précédents

2) Le traitement du cours dans les manuels scolaires

.Le chapitre sur les triangles semblables : cours et exercices

Nous avons dressé un tableau dans lequel nous avons relevé les stratégies des manuels sur les triangles semblables.

Nous nous sommes intéressé en particulier à l'introduction de la notion nouvelle, et à sa position par rapport à la notion de triangles isométriques : les deux chapitres sont-ils séparés ? Les triangles semblables sont-ils introduits comme une extension de la notion de triangles isométriques ? Nous avons aussi relevé aussi les démonstrations présentées dans le cours.

Nous avons essayé de rendre compte de la prise en charge des homologues dans ces manuels : à la fois dans le cours, puis dans les exercices proposés.

Enfin, nous avons comptabilisé le nombre d'exercices portant sur les triangles semblables, pour donner une idée de la place faite à ce chapitre dans le manuel.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

MANUELS	Introduction Isométriques / semblables	Cours		Homologues		Nb d'ex
		Définition de similitude	Démo du cours	Dans le cours	Dans les exercices	
transmath	Révisions Pas d'activité sur triangles semblables	égalité des angles	P1	écriture		26
nouveau pythagore	activités sur transformations	égalité des angles	P1, P'1 et P3 en exercices guidés	Ecriture	4 ex de repérage au début 17 ex dans l'ordre, puis mélangés	33
pyramide	Activités sur les transformations et sur les vecteurs	égalité de 2 angles,	P1 et P'1	Ecriture	dans l'ordre au début (14ex)	27
fractale	Constructions et conditions minimales	égalité des angles				26
déclic	révisions	égalité des angles	P1 et P'1	écriture		17
bréal	constructions	égalité des angles	P1et P'1			49
indices	Activités sur les transformations "faire coïncider"	égalité des angles				16
dimathème	Chapitre triangles semblables, isométrie = cas particulier Activité des comparaison de figures	égalité des angles		écriture		45
delagrave	2 chapitres séparés rappels sur Thalès, comparaison de figures, calculs de propriétés métriques	Angles égaux, triangles qui peuvent être mis en position de Thalès	P1	écriture "justifiée" par son utilité		31
belin	transformations	égalité des angles	P'1		4 exercices en désordre	16
point	2 chapitres séparés activité de comparaison de figures, rappels sur Thalès	définition d'Euclide (angles et longueurs)	P1 et P'1	Définition du mot homologues		27
hyperbole	Rappels sur angles, Thalès et agrandissement - réduction	égalité des angles	P1	Ecriture dans les exercice résolus	8 exercices de repérage	51

Comme nous l'avions déjà remarqué, certains manuels proposent beaucoup plus d'exercices que d'autres sur le sujet : moins de 20 exercices pour BELIN, INDICES ou DECLIC, contre plus de 45 chez DIMATHEME, BREAL et HYPERBOLE ! C'est en effet un chapitre qui est un peu négligé dans certains manuels : la notion nouvelle ne servira plus par la suite.

Pour ce qui est de l'introduction de la notion, seuls deux manuels (DELAGRAVE et POINT) proposent des chapitres séparés pour les triangles semblables et isométriques. Dans ce cas, la notion nouvelle est introduite à l'aide de comparaison de figures, et apparaît donc comme une réponse à un problème. Sans séparer les deux chapitres, c'est l'approche qu'a choisie aussi DIMATHEME (avec les triangles isométriques comme cas particulier des triangles semblables, même s'ils sont introduits en premier).

Pour d'autres manuels, les triangles semblables sont introduits par des activités de construction (FRACTALE et BREAL) ce qui s'apparente aussi à une réponse à un problème.

Pour certains manuels, le chapitre est prétexte à la révision de l'ancien (TRANSMATH, DECLIC et HYPERBOLE) et il n'y a pas vraiment d'activité sur les triangles semblables.

Enfin, pour d'autres manuels, les activités d'introduction concernent surtout les transformations, et donc les triangles isométriques, et le lien avec les triangles semblables est alors difficile à faire (PYTHAGORE, PYRAMIDE, BELIN et INDICES).

La définition choisie pour les triangles semblables est toujours la même : c'est celle qui utilisent les angles (3 angles égaux). Seul un manuel (POINT) utilise la définition d'Euclide, avec à la fois les angles et les longueurs.

Les démonstrations données dans le cours sont généralement celles de P1 et / ou P'1, mais parfois aucune des deux n'est proposée (FRACTALE, INDICES et DIMATHEME).

Enfin, dans quatre manuels les homologues ne sont pas du tout évoqués (FRACTALE, BREAL, INDICES et BELIN), ou juste définis (POINT), tandis que dans les autres seule l'écriture pratique des sommets "les uns en dessous des autres" est donnée dans le cours, justifiée dans un des manuels par son utilité (DELAGRAVE). Aucune méthode n'est donc donnée, pas plus qu'une justification sur la nécessité de repérer les homologues.

Quelques manuels proposent des exercices spécifiques de repérage des homologues (PYTHAGORE et HYPERBOLE) mais ceux-ci sont plutôt rares.

Les stratégies des manuels sont assez différentes : avec un chapitre plus ou moins fourni et un lien fort ou inexistant entre triangles isométriques et semblables. Cependant, quelle que soit la stratégie adoptée, rien n'est fait dans le cours sur le repérage des homologues.

Voyons maintenant si les manuels proposent des exercices différents sur cette notion, et si ces propositions sont cohérentes par rapport aux stratégies que nous avons déjà dégagées.

3) Analyse des exercices des manuels : codage adopté et premiers résultats

Comme nous l'avons déjà précisé, notre codage reprend la grille d'analyse mise en place lors de nos séances d'observation en classe, même si certaines modalités des variables ont été abandonnées au profit d'une meilleure répartition des données. En effet, les classes de peu d'effectifs ne sont pas représentées avec cohérence sur nos graphiques.

Nous avons choisi de retenir la configuration, le mélange ancien-nouveau, les propriétés nouvelles et le niveau de mise en fonctionnement pour effectuer les calculs statistiques. Ce sont nos variables actives. Nos autres variables, et la façon dont elles situent les exercices analysés par rapport à l'ensemble de nos données, sont des variables illustratives. Cette distinction nous permet de mettre en avant les variables les plus pertinentes pour notre classification, et d'éviter de nous retrouver avec des résultats mois lisibles.

variables	**modalités**	
TITRE DU MANUEL	1	Transmath
	2	Pythagore
	3	Pyramide
	4	Fractale
	5	Déclic
	6	Breal
	7	indices
	8	Dimathème
	9	Belin
	10	Delagrave
	11	Hyperbole
	12	Point
	13	Mme B. classe / contrôle
	14	Mme P. classe / contrôle
	15	Mme F. classe / contrôle
CONFIGURATION	1	deux triangles non emboîtés
	2	deux triangles emboîtés / parallélogramme
	3	cercle
HOMOLOGUES	1	donnés dans l'ordre
	2	dans le désordre ou non donnés
MELANGE ANCIEN / NOUVEAU	1	mélange ancien / nouveau
	2	pas de mélange ancien / nouveau ou indiqué
PROPRIETES NOUVELLES	1	D'1 (sens direct uniquement à l'aide des angles)
	2	D'1 + P1 ou P2 (+ indirect ou aire)
	3	D'1 + P1 + P2
	4	P1 seule (sens indirect)
	5	P2 seule (aire)
	6	P'1 ou P3 seule (sens direct avec l'aide des longueurs)
	7	P'1 ou P3 + P1 ou P2 (+ sens indirect ou aire)
ANCIEN : ALGEBRE	1	algèbre
	2	pas d'algèbre
ANCIEN : GEOMETRIE PURE	1	géométrie pure
	2	pas de géométrie pure
ANCIEN : GEOMETRIE ET CALCULS	1	trigonométrie, Pythagore, Thalès
	2	pas de géométrie calculatoire
NIVEAU DE MISE EN FONCTIONNEMENT	1	reconnaissance des modalités
	2	calculs d'intermédiaires
	3	introduction d'étapes
	4	nécessité de faire des choix et changement de cadre

Afin de mettre en ordre les données obtenues, nous avons choisi d'utiliser le logiciel SPAD[71] qui nous permettra plus aisément de mettre en relation nos différentes variables entre elles

[71] SPAD version 5.0, logiciel d'analyse des données

dans les exercices analysés, et de faire apparaître peut-être des caractéristiques propres à chacun des manuels considérés.

SPAD est un logiciel d'analyse de données, qui permet de mieux appréhender, visualiser et synthétiser les principales caractéristiques d'un ensemble de données. Il fournit de nombreux outils, permettant de réaliser une description d'un ensemble de données (description qualitative, quantitative, statistique, description des axes factoriels, tableaux croisés), une analyse factorielle (composantes principales, correspondances multiples) ou encore une classification (partitions, optimisation).

L'analyse factorielle, en particulier, permet de mettre en évidence les liens éventuels entre certaines des variables[72] :

> *"Les méthodes multifactorielles permettent d'obtenir des représentations graphiques qui constituent le meilleur résumé possible de l'information contenue dans un grand tableau de données. Pour cela, il faut consentir à une perte d'information afin de gagner en lisibilité. Dans la plupart des situations, on dispose de plusieurs observations sur chaque individu constituant la population d'étude. On a donc à prendre en compte* p *variables par individu,* p *étant strictement supérieur à 1. L'étude séparée de chacune de ces variables donne quelques informations mais est insuffisante car elle laisse de côté les liaisons entre elles, ce qui est pourtant souvent ce que l'on veut étudier.*

Le logiciel SPAD gère en particulier :

- les fichiers de données (création d'une base de données),
- les analyses (suites de procédures différentes),
- les résultats (sous forme de textes, tableaux, histogrammes, graphiques)

Dans un premier temps, nous rentrons donc toutes les informations sur les exercices des manuels – préalablement codées – dans le programme, afin de constituer une bas de données. Nous choisissons ensuite, en fonction de ce que nous désirons évaluer ou comparer, le type de procédure de calcul à appliquer à cette base. Les graphiques et tableaux obtenus sont édités par SPAD.

---

[72] Cf. la présentation du logiciel sur http://www.stat.ucl.ac.be/ISpersonnel/lecoutre/stats/SPAD/

Voici comment nos variables actives sont représentées dans l'ensemble de nos exercices. Ces chiffres seront illustrés par les histogrammes présentés dans le paragraphe suivant.

TRI A PLAT DES QUESTIONS ACTIVES

```
-------------------+--------------+----------------------------------------------------
--
LIBELLE            | EFF.   POIDS | EFF.  POIDS  HISTOGRAMME DES POIDS RELATIFS
-------------------+--------------+-----------------------------------
3 . configuration
conf = triangles   | 195   195.00 | 195   195.00 ****************************
conf = emboîtés    | 121   121.00 | 121   121.00 ******************
conf = cercle      | 110   110.00 | 110   110.00 ****************
-------------------+--------------+----------------------------------------------------
-
4 . mélange ancien/nouveau
ancien             | 289   289.00 | 289   289.00 **************************************
pas d'ancien/indic | 137   137.00 | 137   137.00 ********************
-------------------+--------------+----------------------------------------------------
-
5 . propriétés nouvelles
D'1 seule          | 123   123.00 | 123   123.00 ******************
D'1+P1             | 184   184.00 | 185   185.00 ***************************
D'1 + P1 + P2      |  30    30.00 |  31    31.00 *****
P1 seule ou + D1   |  13    13.00 |  14    14.00 **
P2 seule           |   6     6.00 | === VENTILEE ===
P'1 ou P3 seules   |  42    42.00 |  43    43.00 *******
P'1 ou P3 + P1 ou P2  28    28.00 |  30    30.00 *****
-------------------+--------------+----------------------------------------------------
-
9 . niveau de mise en fonctionnement
reconnaissance mod | 111   111.00 | 111   111.00 ****************
intermédiaires     | 212   212.00 | 212   212.00 ******************************
étapes             |  83    83.00 |  83    83.00 ************
choix              |  20    20.00 |  20    20.00 ***
```

Certaines modalités sont trop faibles pour participer aux calculs, aussi elles sont "ventilées", comme ici la modalité "travail de P2". Nous voyons déjà apparaître ici les modalités prédominantes : configuration simple (triangles non emboîtés), révision de l'ancien, travail des propriétés D'1 + P1, fonctionnement avec calcul d'intermédiaires. Il semblerait donc qu'une grande tendance se dégage de ces premiers chiffres, qui montrerait les exercices des manuels comme étant relativement simples (d'après la configuration, le niveau de mise en fonctionnement et le travail de certaines propriétés) et permettant une révision des connaissances anciennes des élèves.

Grâce aux variables illustratives, nous allons pouvoir analyser plus finement ce travail de l'ancien, en particulier en détaillant en fonction des connaissances révisées (algèbre, géométrie pure ou mettant en jeu des calculs de longueurs). Nous allons pouvoir aussi nuancer ce résultat en fonction des différents manuels.

TRIS A PLAT DES VARIABLES NOMINALES

```
                           ------ EFFECTIFS -------
                           ABSOLU  %/TOTAL  %/EXPR.   HISTOGRAMME DES POIDS
----------------------------------------------------------------------------
   1 . titre du manuel/nom du prof
TRANSMATH                 26     6.10    6.10    ***
PYTHAGORE                 33     7.75    7.75    ****
PYRAMIDE                  25     5.87    5.87    ***
FRACTALE                  26     6.10    6.10    ***
DECLIC                    21     4.93    4.93    ***
BREAL                     50    11.74   11.74    ******
INDICES                   16     3.76    3.76    **
DIMATHEME                 45    10.56   10.56    *****
BELIN                     16     3.76    3.76    **
DELAGRAVE                 31     7.28    7.28    ****
HYPERBOLE                 51    11.97   11.97    ******
POINT                     26     6.10    6.10    ***
Mme B.                    20     4.69    4.69    ***
Mme P.                    24     5.63    5.63    ***
Mme F.                    16     3.76    3.76    **
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
-------------------------------------------------------------------------------
   2 . type d'exercice
manuel                   366    85.92   85.92    ****************************************
prof classe               31     7.28    7.28    ****
prof maison               20     4.69    4.69    ***
prof contrôle              9     2.11    2.11    *
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
---------------------------------------------------------------------
   3 . configuration
conf = triangles         195    45.77   45.77    **********************
conf = emboîtés          121    28.40   28.40    **************
conf = cercle            110    25.82   25.82    ************
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
--------------------------------------------------------------------------------------
   4 . mélange ancien/nouveau
ancien                   289    67.84   67.84    ********************************
pas d'ancien/indic       137    32.16   32.16    ***************
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
-------------------------------------------------------------------------------
   5 . propriétés nouvelles
D'1 seule                123    28.87   28.87    **************
D'1+P1                   184    43.19   43.19    ********************
D'1 + P1 + P2             30     7.04    7.04    ****
P1 seule ou + D1          13     3.05    3.05    **
P2 seule                   6     1.41    1.41    *
P'1 ou P3 seules          42     9.86    9.86    *****
P'1 ou P3 + P1 ou P2      28     6.57    6.57    ****
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
---------------------------------------------------------------------------------------
   6 . ancien : algèbre
algèbre                   52    12.21   12.21    ******
pas d'algèbre            374    87.79   87.79    *****************************************
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
----------------------------------------------------------------------------------------
   7 . ancien : géo pure
géo pure                 201    47.18   47.18    **********************
pas de géo pure          225    52.82   52.82    *************************
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
--------------------------------------------------------------------------------------
   8 . ancien : géo calc
(trig+pyth+thal)         103    24.18   24.18    ************
pas de géo calc          323    75.82   75.82    ***********************************
ENSEMBLE                 426   100.00  100.00
---------------------------------------------------------------------------------------
   9 . niveau de mise en fonctionnement
reconnaissance mod       111    26.06   26.06    ************
intermédiaires           212    49.77   49.77    ***********************
```

étapes	83	19.48	19.48	*********
choix	20	4.69	4.69	***
ENSEMBLE	426	100.00	100.00	
10 . ordre des homologues				
ordre	216	50.70	50.70	************************
désordre/pas donnés	210	49.30	49.30	***********************
ENSEMBLE	426	100.00	100.00	

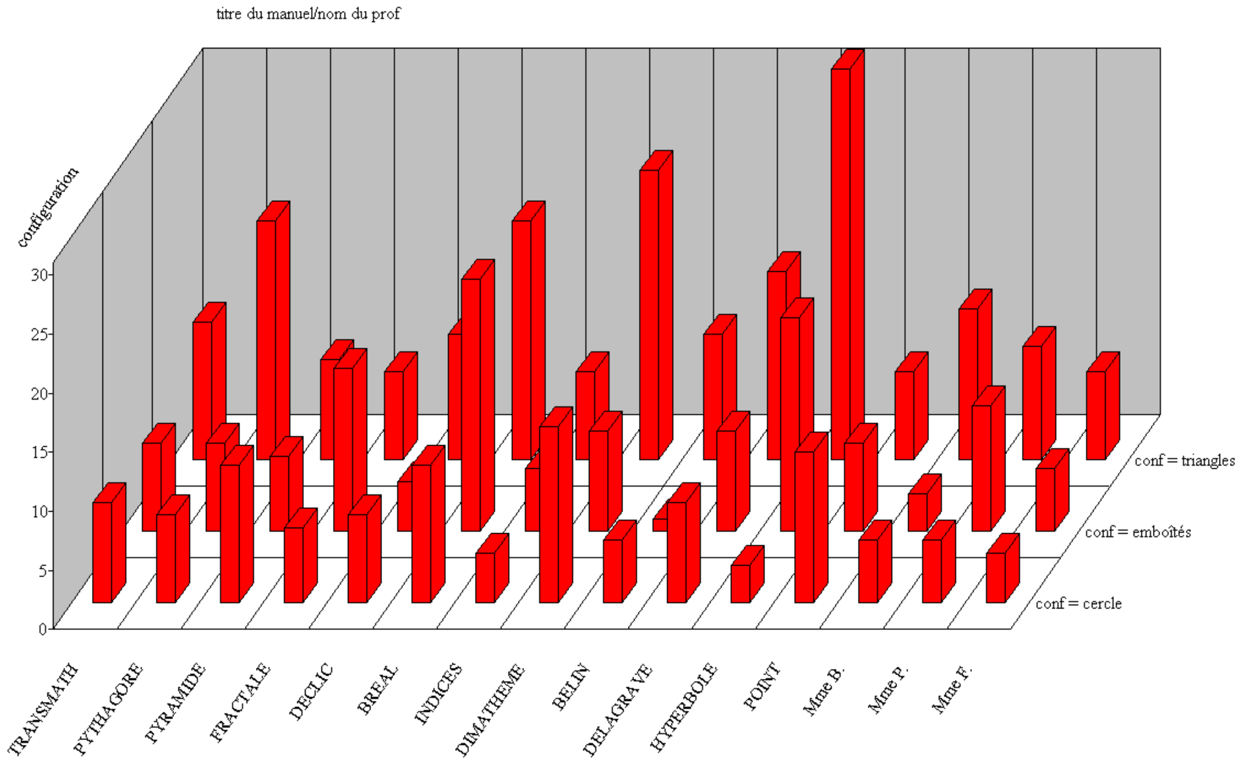
Nous pouvons déjà préciser nos premiers résultats en constatant que l'algèbre est une connaissance plutôt peu travaillée dans ce chapitre, et que la géométrie pure se retrouve dans une moitié des exercices environ.

Nous allons affiner cette recherche en regardant maintenant les variables deux par deux, ce qui nous permet de comparer en particulier nos différents manuels, puis de combiner les modalités afin de savoir quel type de travail se trouve dans les exercices de ce chapitre, et à quel niveau de difficulté.

4) Comparaison des exercices des manuels : histogrammes obtenus grâce aux tris à plat

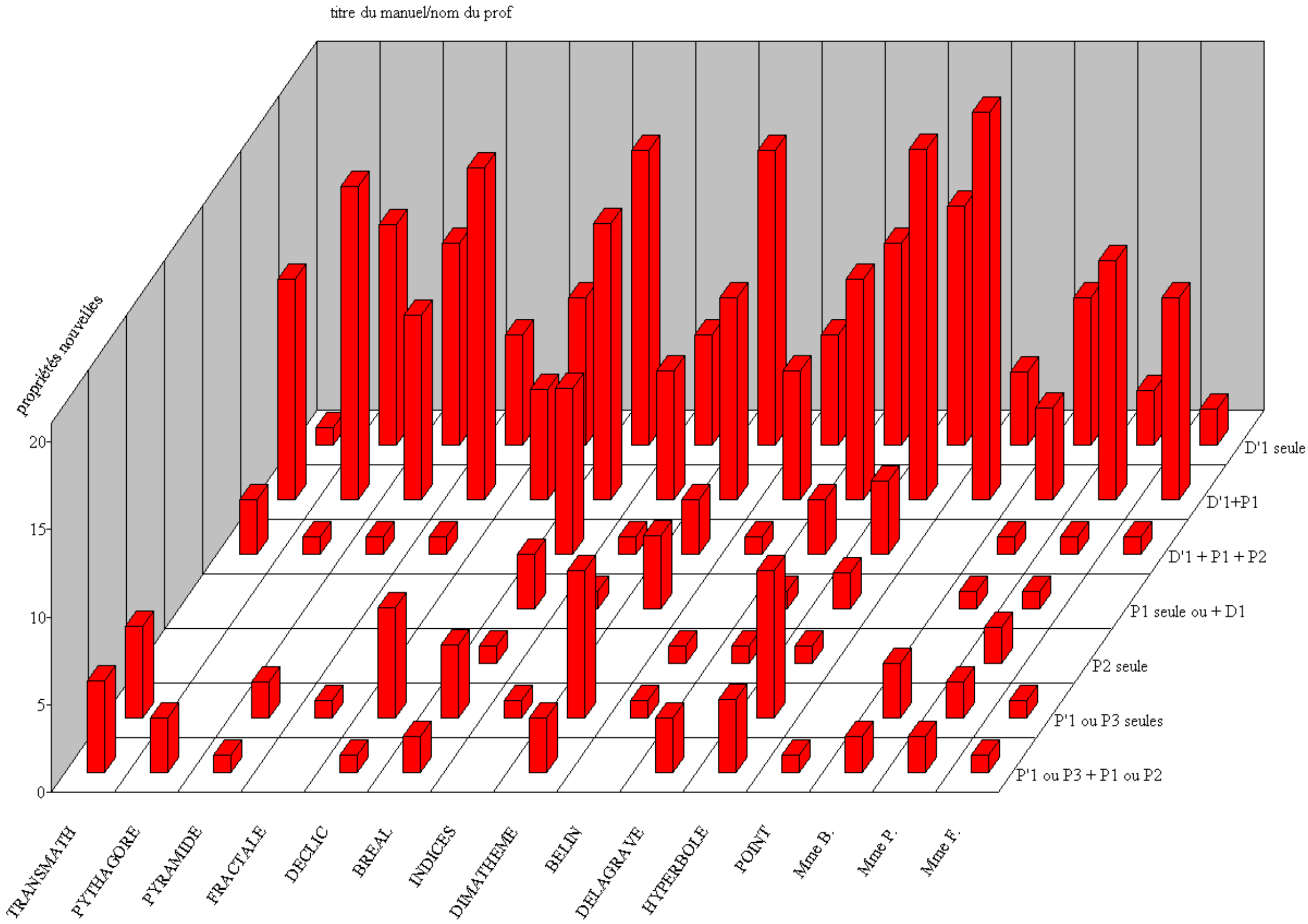
Dans un premier temps, nous allons donc regarder comment chacune de nos variables est représentée dans les exercices des manuels considérés. Nous traiterons le cas des homologues à part.

a) les configurations des figures étudiées



La configuration la plus simple, deux triangles non emboîtés, est généralement la plus fréquente dans les manuels. Les configurations "triangles emboîtés" et "cercle", que nous considérons comme plus difficiles, sont représentées dans tous les manuels. La configuration cercle est la plus fréquente dans PYRAMIDE et POINT, elle est aussi très présente dans DIMATHEME. Nous notons aussi un travail plus important de la configuration "triangles emboîtés" dans FRACTALE, BREAL et aussi chez Mme P.

b) le travail du nouveau



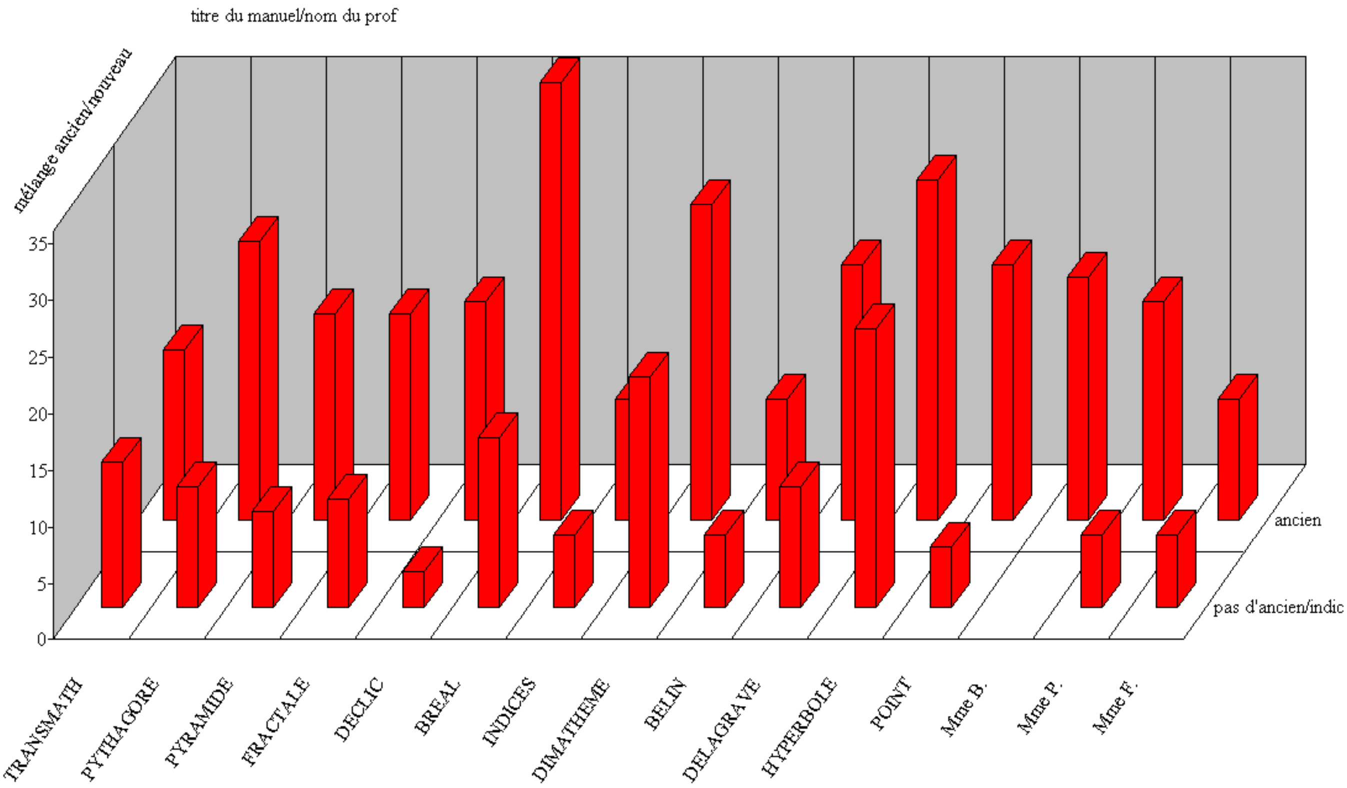
Les propriétés qui sont le plus travaillées dans les exercices de ces manuels sont les propriétés D'1 (qui permet de démontrer que deux triangles sont semblables à l'aide de leurs angles uniquement) et la combinaison D'1+P1 (démonstration de la similitude, utilisée ensuite pour déduire des rapports de longueurs, ou des longueurs des triangles). Elles constituent largement la plus grande part des exercices proposés.

La combinaison complexe "directe, puis indirecte puis aire" est présente dans presque tous les manuels (sauf FRACTALE et POINT).

Le travail de P1 et P2 (travail sur les longueurs ou les aires) est absent de la majorité des manuels, et n'est pas toujours travaillée par nos professeurs (seule Mme P. fait travailler spécifiquement ces deux propriétés, et Mme B. P1 uniquement).

Les propriétés qui permettent de déduire la similitude à l'aide des trois longueurs (P'1) ou de deux longueurs et d'un angle (P3) sont présentes presque tous les manuels, et plus particulièrement dans TRANSMATH, DECLIC, BREL, DIMATHEME et HYPERBOLE.

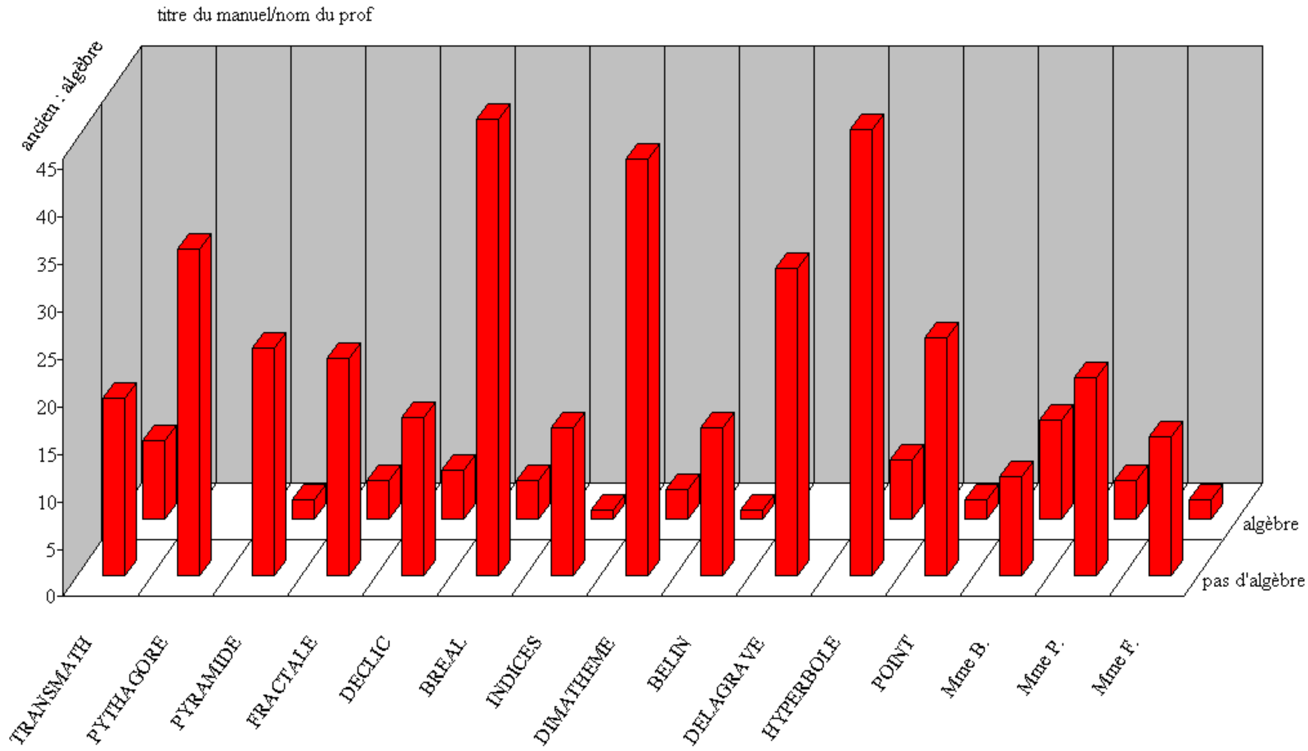
c) le mélange ancien – nouveau



Le travail de l'ancien, mélangé aux propriétés nouvelles du chapitre, est présent dans la grande majorité des exercices des manuels ; il est systématique chez Mme B., et prédomine aux exercices entièrement sur le nouveau dans tous les manuels.

Après avoir repéré l'ancien dans les exercices, nous allons spécifier pour chaque manuel s'il s'agit d'algèbre ou de géométrie, cette dernière pouvant être de la géométrie pure ou de la géométrie calculatoire. Nous allons détailler maintenant les résultats pour ces trois types d'ancien.

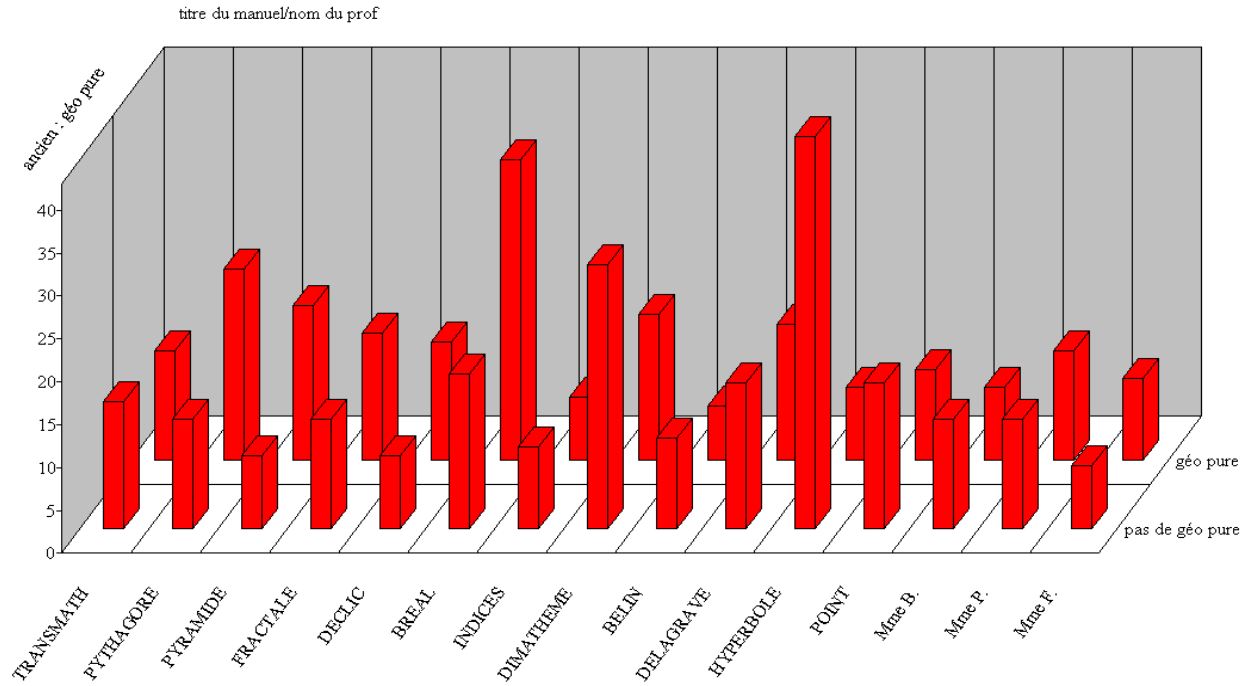
d) mélange avec l'algèbre



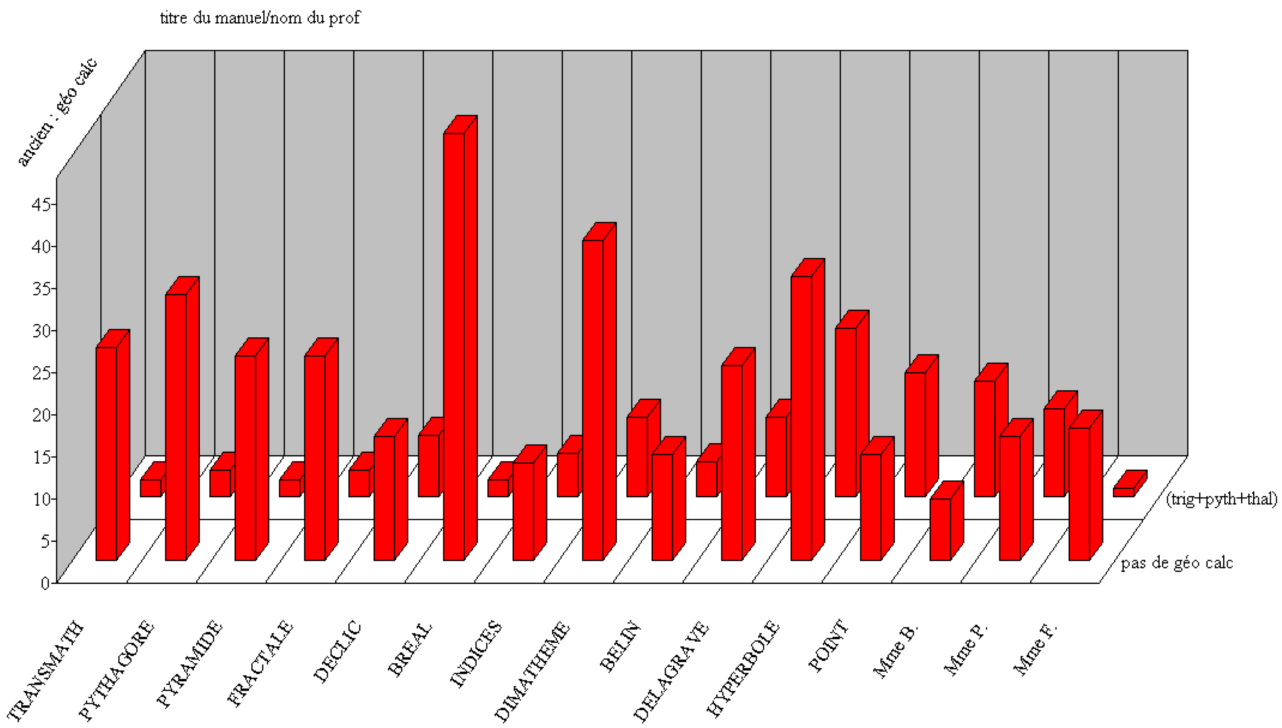
L'algèbre est relativement peu présent dans les exercices de ces manuels, voire même absent pour deux d'entre eux (PYTHAGORE et DELAGRAVE). La présence d'une tâche algébrique dans un exercice de géométrie oblige souvent à effectuer un changement de cadre, et par conséquent augmente la difficulté du niveau de mise en fonctionnement de la propriété nouvelle dont l'apprentissage est visé dans l'exercice.

e) le mélange avec la géométrie pure et la géométrie calculatoire[73]

[73] Nous avons choisi d'appeler "géométrie calculatoire" les propriétés mathématiques qui permettent les calculs de longueurs ou d'angles



titre du manuel/nom du prof
ancien : géo pure
40
35
30
25
20
15
10
5
0
géo pure
pas de géo pure
TRANSMATH
PYTHAGORE
PYRAMIDE
FRACTALE
DECLIC
BREAL
INDICES
DIMATHEME
BELIN
DELAGRAVE
HYPERBOLE
POINT
Mme B.
Mme P.
Mme F.



titre du manuel/nom du prof
ancien : géo calc
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
(trig+pyth+thal)
pas de géo calc
TRANSMATH
PYTHAGORE
PYRAMIDE
FRACTALE
DECLIC
BREAL
INDICES
DIMATHEME
BELIN
DELAGRAVE
HYPERBOLE
POINT
Mme B.
Mme P.
Mme F.

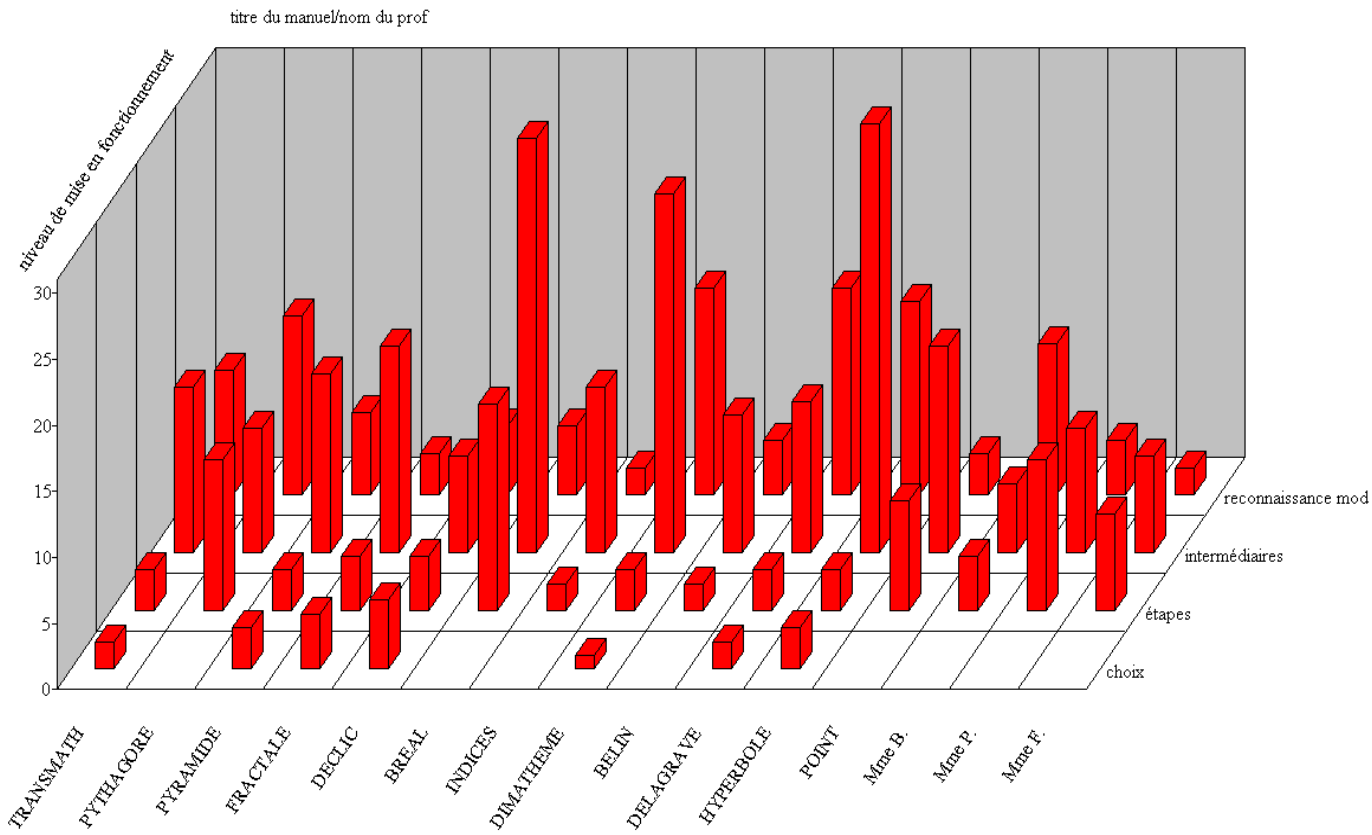
Nous remarquons que la géométrie pure est présente dans une bonne moitié des exercices sur les triangles semblables, et particulièrement dans BEAL, mais pas dans HYPERBOLE, qui privilégie nettement le travail du nouveau.

Il nous paraît assez normal que la géométrie pure soit présente dans les exercices sur les triangles semblables, ne serait-ce que pour démontrer les égalités d'angle nécessaires à la preuve de la similitude. Nous avons pris en compte en particulier le théorème de l'angle inscrit, les égalités d'angles définis par deux parallèles et une sécante, mais aussi des propriétés générales des figures géométriques classiques, comme celles des triangles particuliers.

Ce travail de la géométrie du collège confirme nos résultats sur la révision des connaissances anciennes, et suit les instructions du programme scolaire de mathématiques.

Il y a cependant un pourcentage non négligeable d'exercices qui ne contiennent pas de géométrie pure, on y trouve alors parfois de la géométrie calculatoire, qui permet d'obtenir des mesures d'angles ou de longueurs, à l'aide des théorèmes de Thalès, de Pythagore, ou des formules trigonométriques, voire, plus rarement, à l'aide de procédés analytiques. Cette géométrie est tout de même nettement moins représentée dans les exercices du chapitre, peut-être parce que les calculs de longueurs peuvent être obtenus ici à l'aide des triangles semblables (utilisation de P1 et des rapports de longueurs).

f) le niveau de mise en fonctionnement



Nous constatons que les niveaux les plus complexes selon nous sont les moins représentés dans les exercices.

Le niveau de mise en fonctionnement que l'on trouve le plus est le calcul d'intermédiaires. En effet, il est fréquent de devoir utiliser dans les exercices une connaissance ancienne pour prouver l'égalité d'angles, par exemple, avant de pouvoir appliquer le cours nouveau. La reconnaissance simple des modalités est très fréquente elle aussi.

L'introduction d'étapes est présente dans tous les manuels et chez tous les professeurs, de manière plus ou moins importante : cela ne concerne en général que quelques exercices, sauf chez PYTHAGORE, BREAL ou POINT, qui en proposent un peu plus.

La nécessité de faire des choix, le niveau le plus difficile selon nous, n'est pas représentée dans tous les manuels étudiés, mais seulement dans TRANSMATH, PYRAMIDE, FRACTALE, DECLIC, DIMATHEME, DELAGRAVE et HYPERBOLE. On ne la trouve pas non plus chez les professeurs observés.

Voilà un tableau récapitulatif des caractéristiques les plus fortes de nos manuels, dégagées lors de l'analyse des histogrammes.

MANUELS	configuration	ancien	nouveau	NMF
Transmath	triangles	Grande proportion d'ex sans travail de l'ancien, Travail de l'algèbre	Travail des longueurs	Assez varié
Pythagore	triangles	Pas d'algèbre	Pas de travail des longueurs	"Reconnaissance" Pas de "choix"
Pyramide	cercle			Assez varié
Fractale	emboîtés		Pas de travail des combinaisons complexes	Assez varié
Déclic	triangles	Peu d'exercices sans ancien	Peu d'exercices Travail des longueurs	Très varié
Breal	Triangles ou emboîtés	Peu d'ancien Beaucoup de géo pure, peu de géo calc.	plus d'exercices Grande variété Travail de P1, P2	"Intermédiaire" très majoritaire Pas de "choix"
indices	triangles	environ 50% d'exercices sans ancien	Peu d'exercices Travail de P1	Pas de "choix"
Dimathème	triangles	environ 50% d'exercices sans ancien	plus d'exercices Travail de P1, Travail des longueurs	"Intermédiaire" très majoritaire
Belin	triangles	environ 50% d'exercices sans ancien	Peu d'exercices Travail de P2	Pas de "choix"
Delagrave	triangles	Pas d'algèbre	Travail de P1, P2	"Reconnaissance"
Hyperbole	triangles	Peu de géo pure, environ 50% d'exercices sans ancien	Plus d'exercices, grande variété Travail de P1, P2 Travail des longueurs	"Intermédiaire" très majoritaire
Point	cercle	Peu d'ancien Grande proportion de géo calc	Pas de travail des longueurs	Pas de "choix"

Nous pouvons donc voir que certains manuels proposent nettement moins d'exercices (DECLIC, INDICES et BELIN), tandis que d'autres en proposent au contraire beaucoup (BREAL, DIMATHEME et HYPERBOLE). Cela nous montre que la place accordée au chapitre n'est pas la même dans tous les manuels.

Certains privilégient le travail de l'ancien (DECLIC, BREAL et POINT) et d'autres un travail plus diversifié des propriétés nouvelles, en particulier en ce qui concerne les propriétés sur les longueurs, assez rarement traitées. Ce sont les manuels qui proposent le plus d'exercices qui se permettent cette variété (BREAL et HYPERBOLE).

Le niveau de mise en fonctionnement est plutôt simple dans certains manuels (PYTHAGORE) et plus élevé dans d'autres (DECLIC).

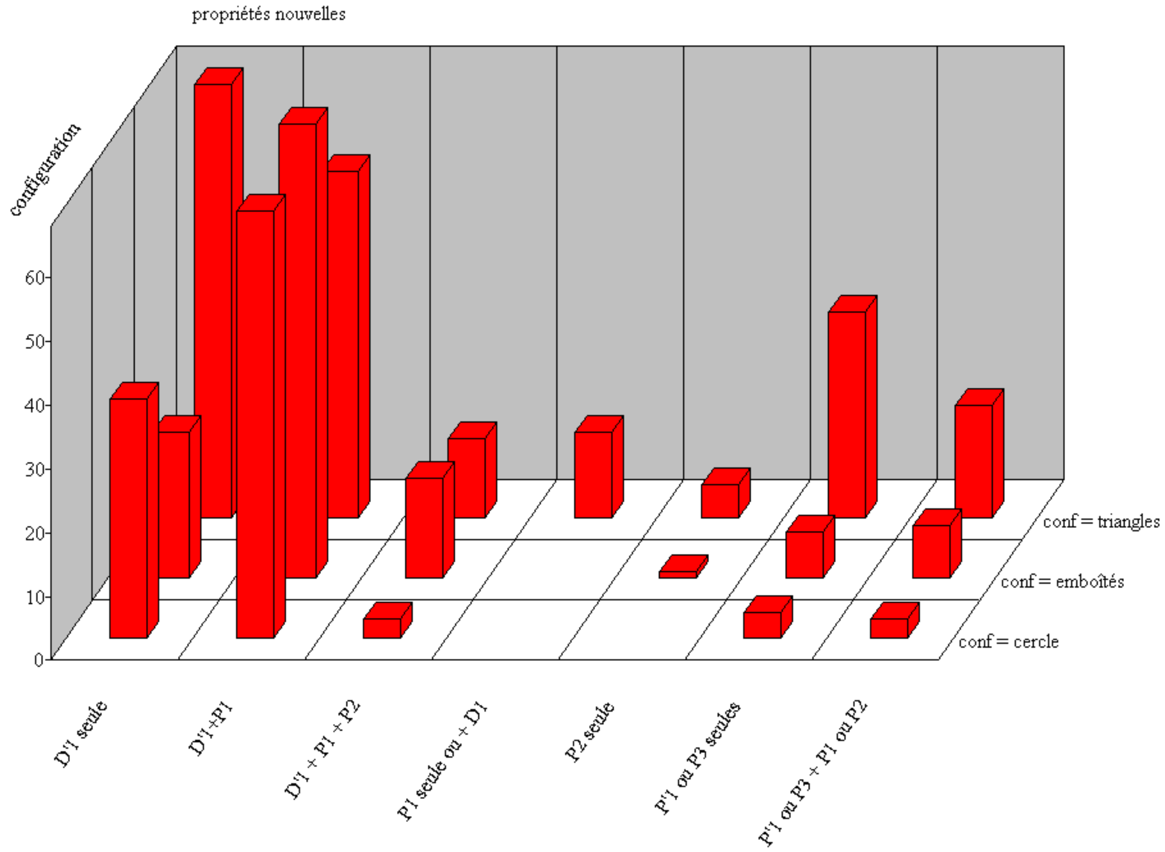
Ces manuels sont donc apparemment relativement différents, en termes de variété et de complexité des exercices proposés sur les triangles semblables. Nous complèterons ce résultat à l'aide de l'analyse des cours de ce chapitre, puis en réalisant une analyse factorielle des correspondances multiples sur l'ensemble de nos données.

5) Spécificité du travail proposé sur les triangles semblables

Le fait de rechercher la présence des différentes variables une par une dans les manuels ne nous renseigne pas vraiment sur la difficulté des tâches proposées, car c'est le mélange de plusieurs des dimensions que nous avons évoquées qui participe à la complexité des exercices.

Il est donc intéressant pour nous de croiser plusieurs de ces variables. Nous reviendrons par la suite sur la caractérisation des manuels.

a) configurations pour le travail du nouveau



Ici encore, nous constatons que le travail sur P1 et P2 est peu proposé, quelle que soit la configuration..

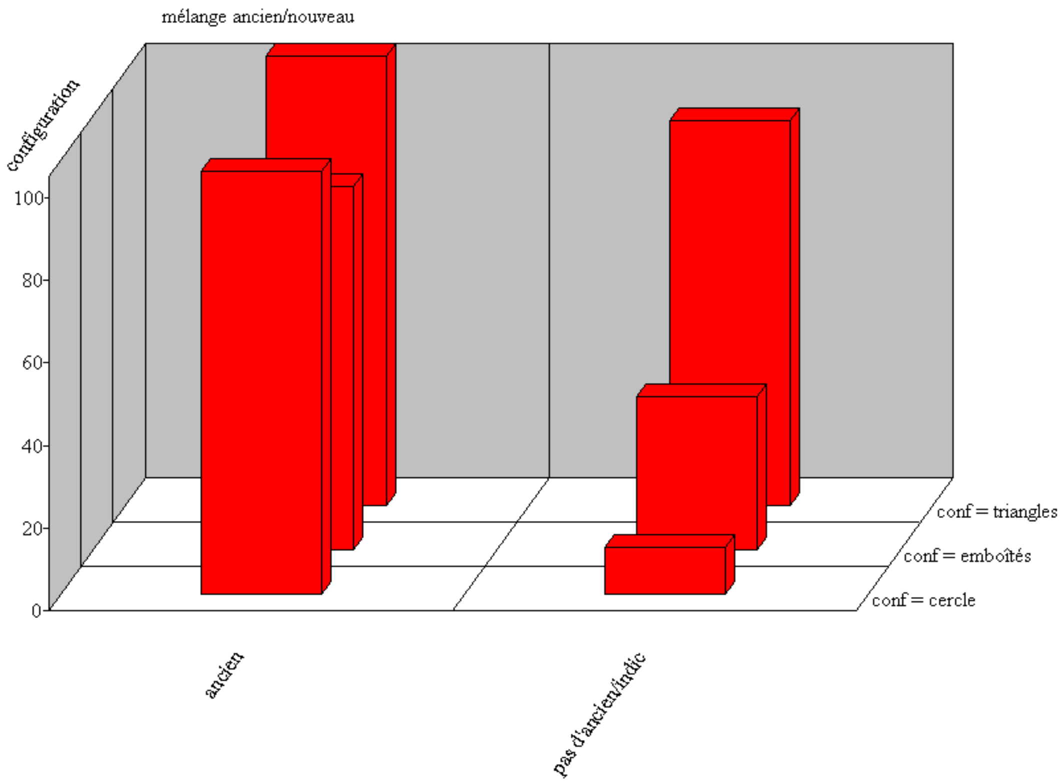
La configuration la plus simple est la plus représentée. Elle permet le travail de toutes les propriétés.

La configuration "cercle" se prête moins au travail des longueurs et des aires (P1 seule, P2 seule, P'1 ou P3) car elle est souvent associée au travail sur les angles (avec le théorème de l'angle inscrit).

La configuration "emboîtés" se prête un peu plus au travail des longueurs. Cela pourrait confirmer notre hypothèse selon laquelle il est plus facile de repérer les homologues à l'aide des longueurs qu'à partir des angles.

Dans tous les cas, il y a rarement à la fois une figure compliquée et une combinaison complexe de plusieurs notions nouvelles (sauf peut-être pour la classique "D'1 + P1")

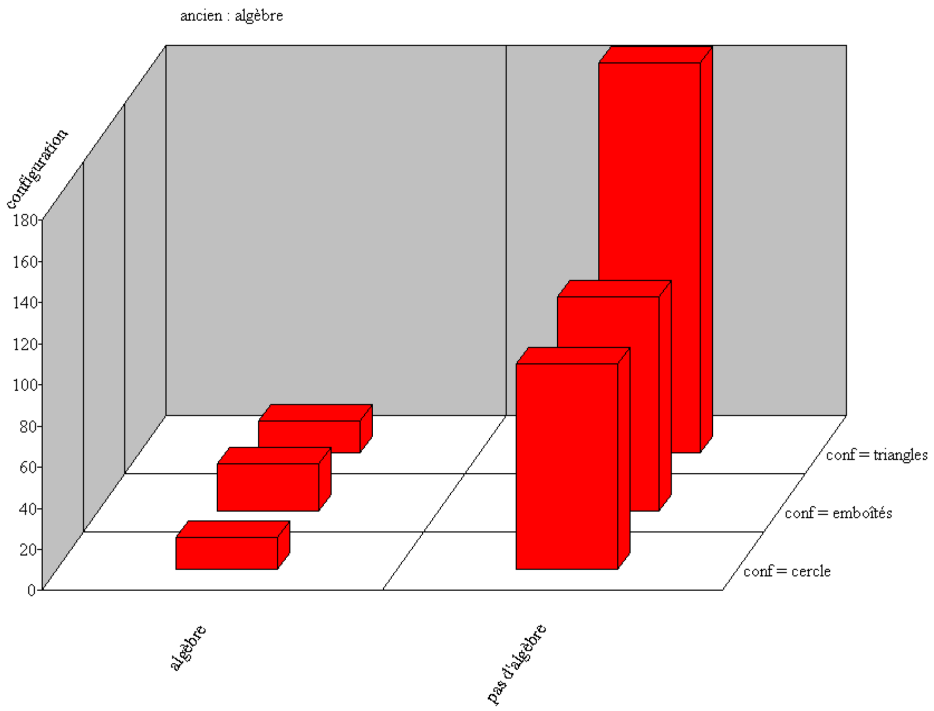
b) mélange ancien-nouveau et configuration



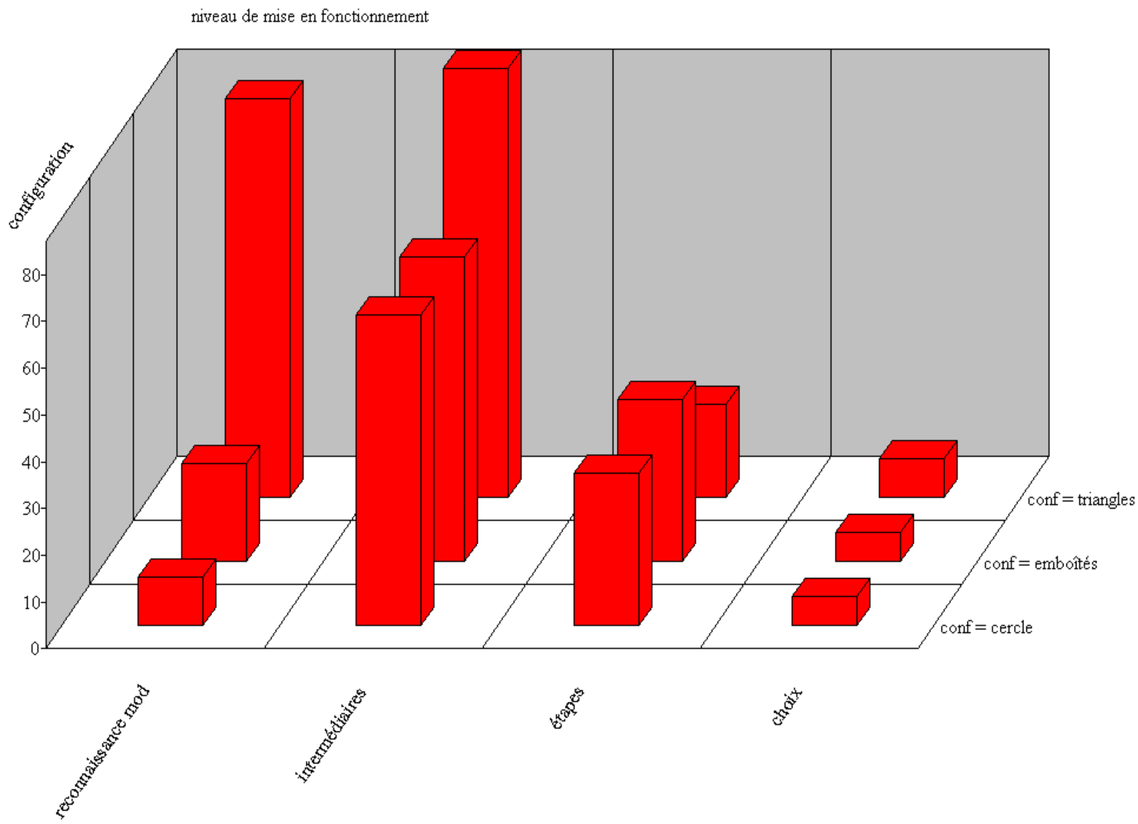
Le croisement de ces deux variables nous permet de constater encore une fois que les manuels privilégient des exercices simples : plus la configuration de la figure étudiée apporte de difficulté à l'exercice, moins le mélange avec l'ancien est proposé

c) configuration et algèbre

Il semble ici que la configuration n'ait pas grande influence sur la présence ou non de tâches algébriques dans l'exercice.

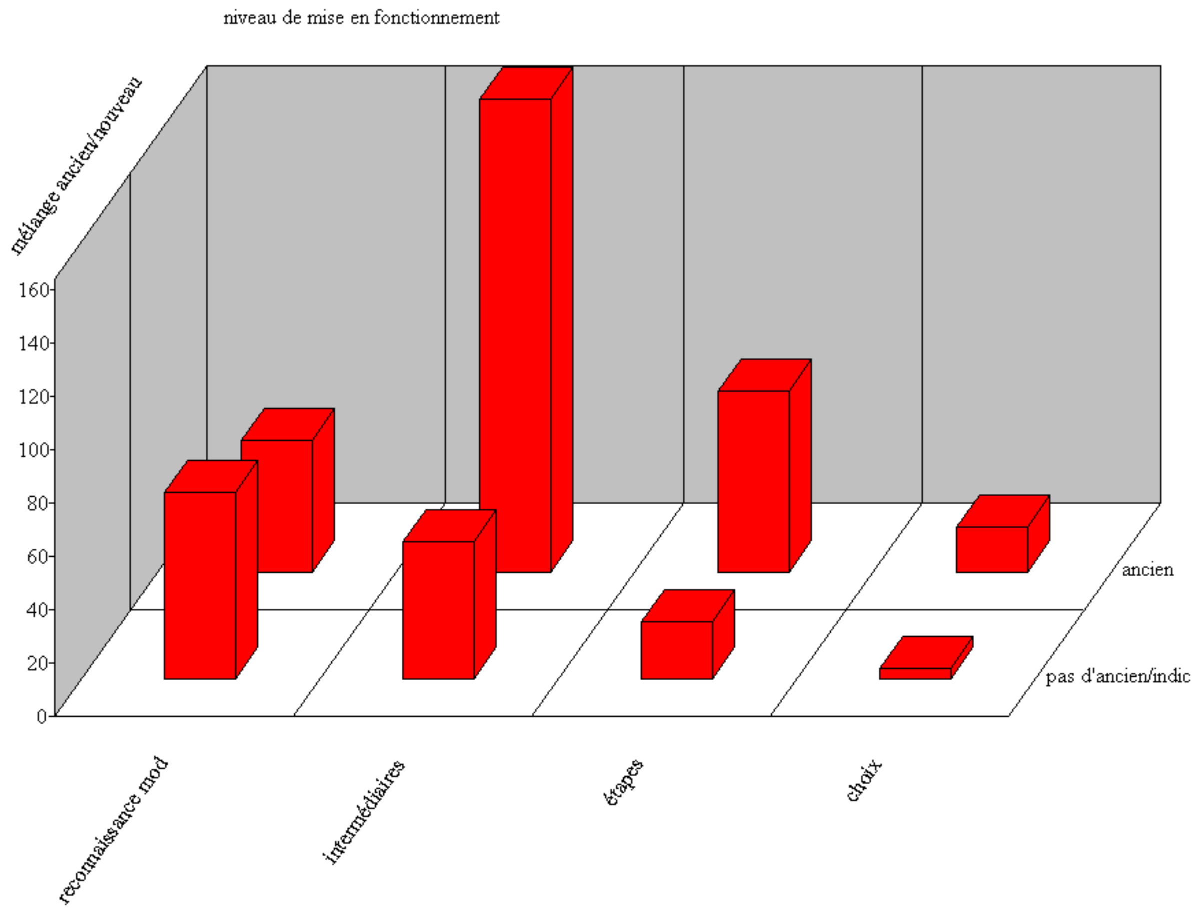


d) niveau de mise en fonctionnement et configuration



Une fois encore nous pouvons constater que la complexité ne se trouve que rarement à travers plusieurs variables : si la figure est compliquée, le niveau de mise en fonctionnement sera généralement simple, et inversement. Seul le calcul d'intermédiaires se prête à tout type de configuration.

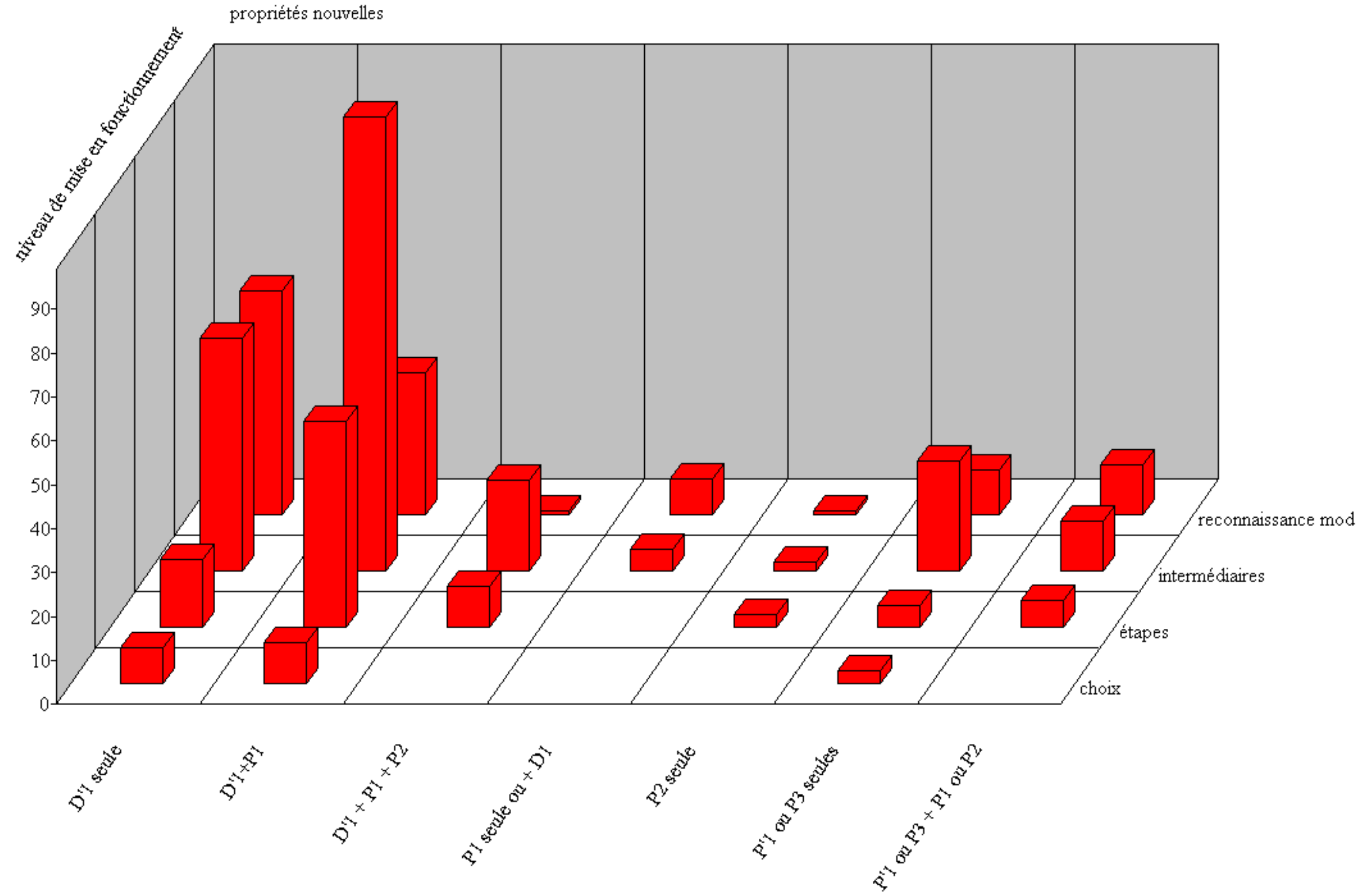
e) niveau de mise en fonctionnement et mélange ancien-nouveau



De ce croisement de variables, il ressort une large représentation du couple "intermédiaires – ancien", ce qui paraît logique, étant donné que le travail de l'ancien nécessite au moins une introduction d'intermédiaires.

Nous constatons, pour les autres cas de figure, que plus la difficulté du niveau de mise en fonctionnement augmente, plus le nombre d'exercices mélangeant l'ancien et le nouveau diminue.

f) niveau de mise en fonctionnement et propriétés nouvelles



Dans ce dernier graphique, il est facile de voir que la plupart des propriétés nouvelles ne sont travaillées qu'à travers des applications peu complexes. Une fois de plus, certaines applications sont très peu représentées, en particulier le travail spécifique sur les longueurs et les aires.

Dans les manuels que nous avons étudiés, et qui représentent la quasi-totalité de l'offre qui est faite aux professeurs, nous avons trouvé finalement assez peu d'exercices complexes. Lorsque le niveau de mise ne fonctionnement est plus élevé, c'est la configuration qui est plus simple, ou le mélange avec l'ancien qui est plus rare. Les difficultés s'accumulent peu, et le travail des propriétés nouvelles est souvent limité aux propriétés les plus classiques, tandis que le travail sur les longueurs est souvent laissé de côté.

6) Le traitement des homologues dans les exercices

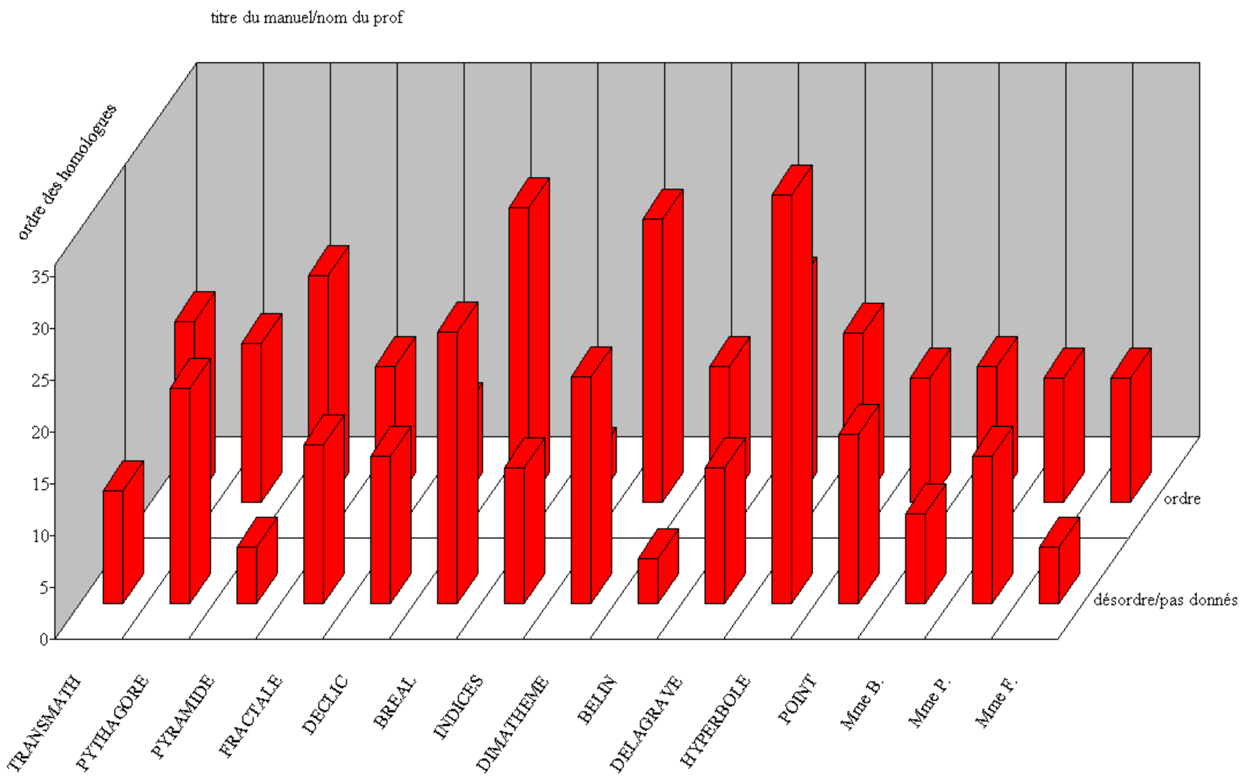
Nous avons regardé si les noms des triangles étaient donnés dans l'ordre dans les énoncés où il est question de repérage, dans les exercices du chapitre sur les triangles semblables.

Nous avons obtenu les chiffres suivants :

	Sommets dans l'ordre	Sommets dans le désordre (ou non donnés)	total
Nombre d'exercices	216	210	426

Il semblerait donc qu'on trouve aussi souvent les sommets dans l'ordre que dans le désordre dans les manuels.

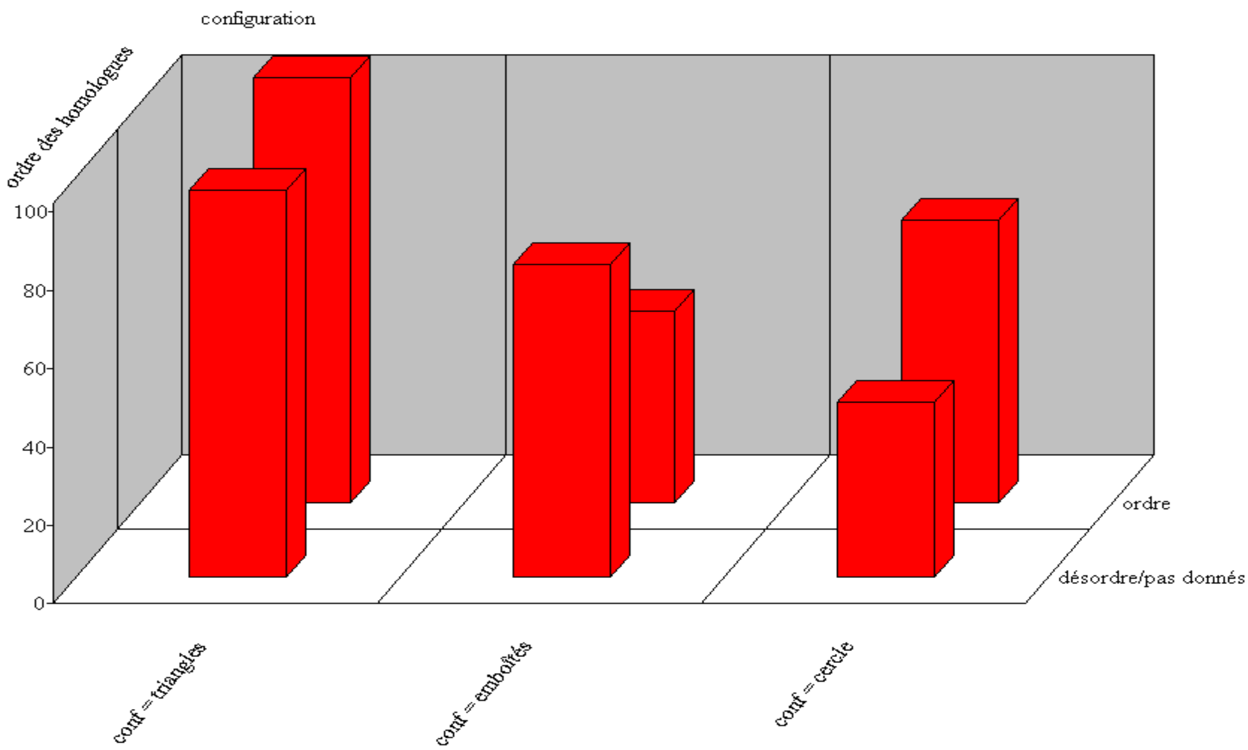
Regardons ce résultat plus spécifiquement en fonction des différents manuels.



Dans la plupart des manuels, l'écriture des homologues dans l'ordre ou le désordre est représentée à peu près de la même manière. Dans certains cependant, ce n'est pas le cas : dans

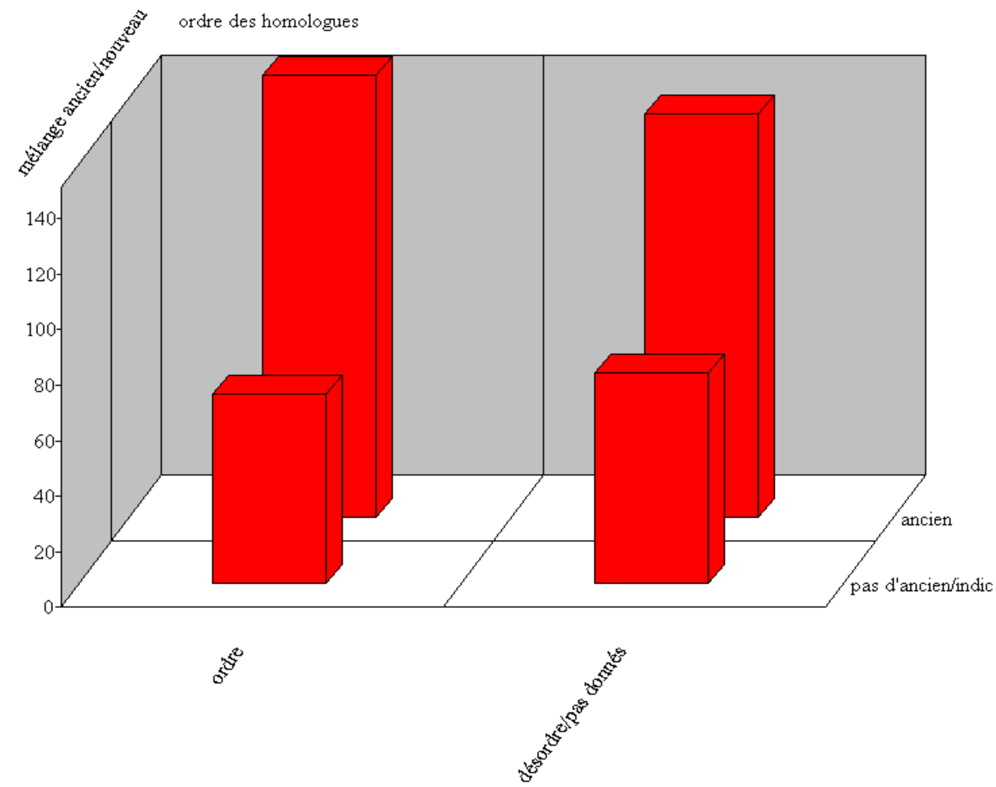
PYRAMIDE et BELIN, les sommets sont surtout donnés dans l'ordre, ne permettant donc pas toujours le travail de repérage. Dans HYPERBOLE au contraire, c'est dans le désordre que les sommets sont donnés le plus souvent, ce qui augmente la complexité des exercices.

La difficulté du repérage ayant un rapport étroit avec la complexité de la configuration, nous avons aussi regardé comment ces deux variables se correspondaient.

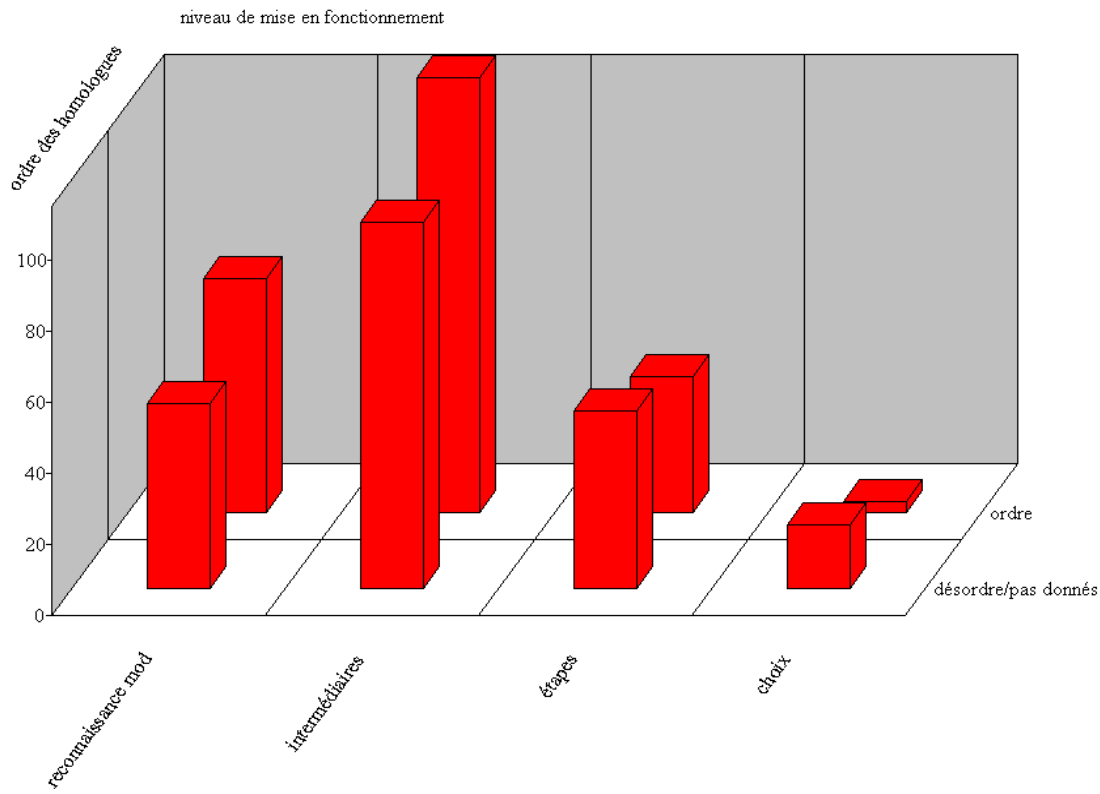


Il semble que la configuration "emboîtés" soit liée au repérage, car elle est la seule pour laquelle les noms des triangles sont plus souvent donnés dans le désordre. Cela paraît logique, étant donné le fait que cette configuration permet plus difficilement une perception intuitive des sommets homologues, et qu'elle nécessite donc plus particulièrement un travail de repérage.

La configuration "cercle" en revanche est plus souvent donnée avec les homologues dans l'ordre, peut-être pour compenser la complexité de cette configuration, souvent associée au mélange avec des propriétés plus anciennes.

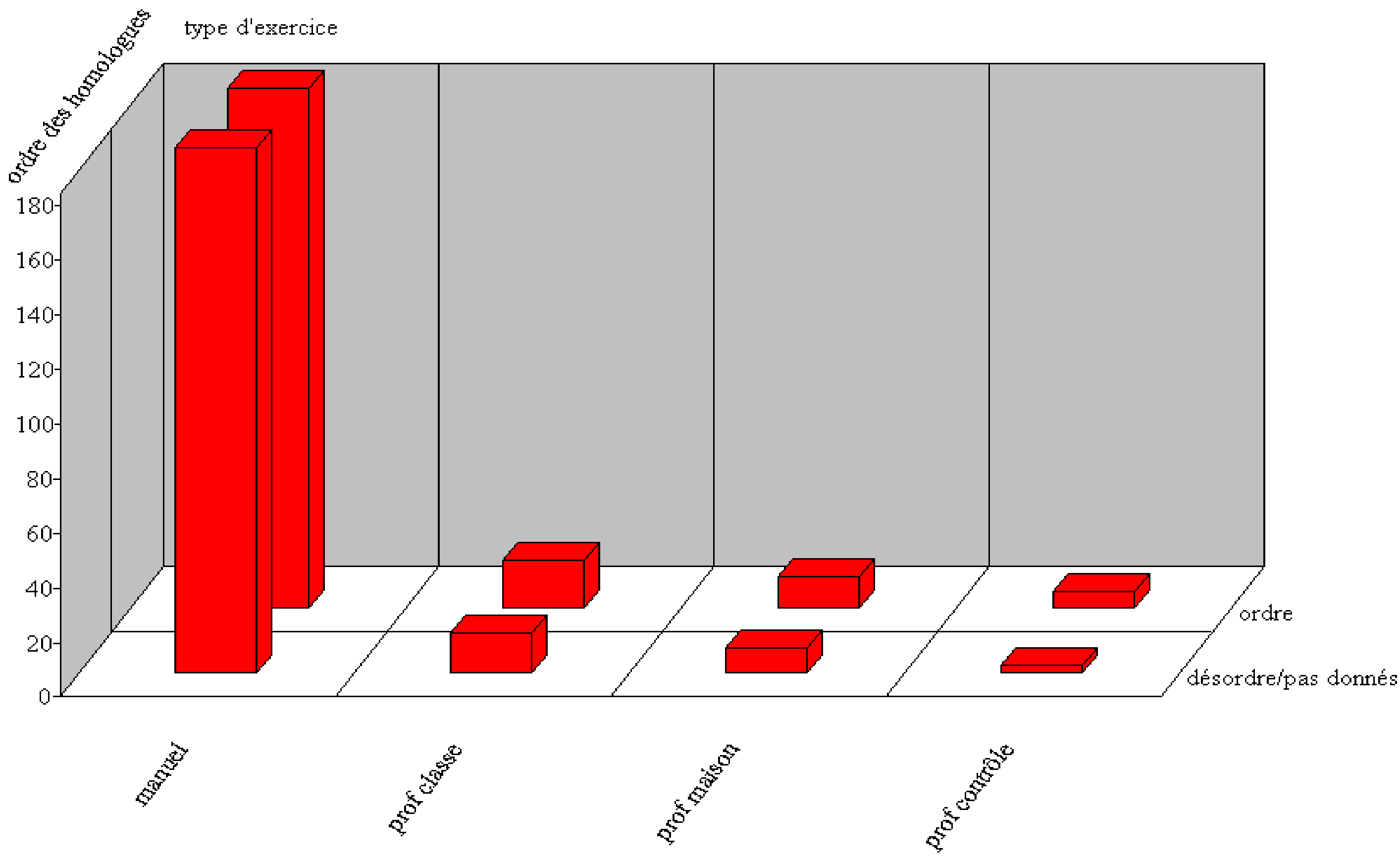


Le travail de l'ancien et l'ordre des homologues ne sont vraisemblablement pas corrélés.



Il semblerait que le niveau de mise en fonctionnement n'influe pas sur l'ordre des homologues qui est donné, sauf pour le NMF le plus complexe. Il est probable que la nécessité de faire des choix concerne en grande partie des exercices où les triangles semblables sont des outils pour démontrer d'autres propriétés, et pour lesquels les noms des triangles ne sont pas donnés, ce qui explique ce résultat.

Nous nous sommes demandé aussi si l'ordre des homologues pouvait dépendre du type d'exercice analysé, et si on trouvait des différence entre ce qui est proposé dans les manuels, et ce que les professeurs demandent à leurs élèves, en classe, à la maison ou en contrôle.

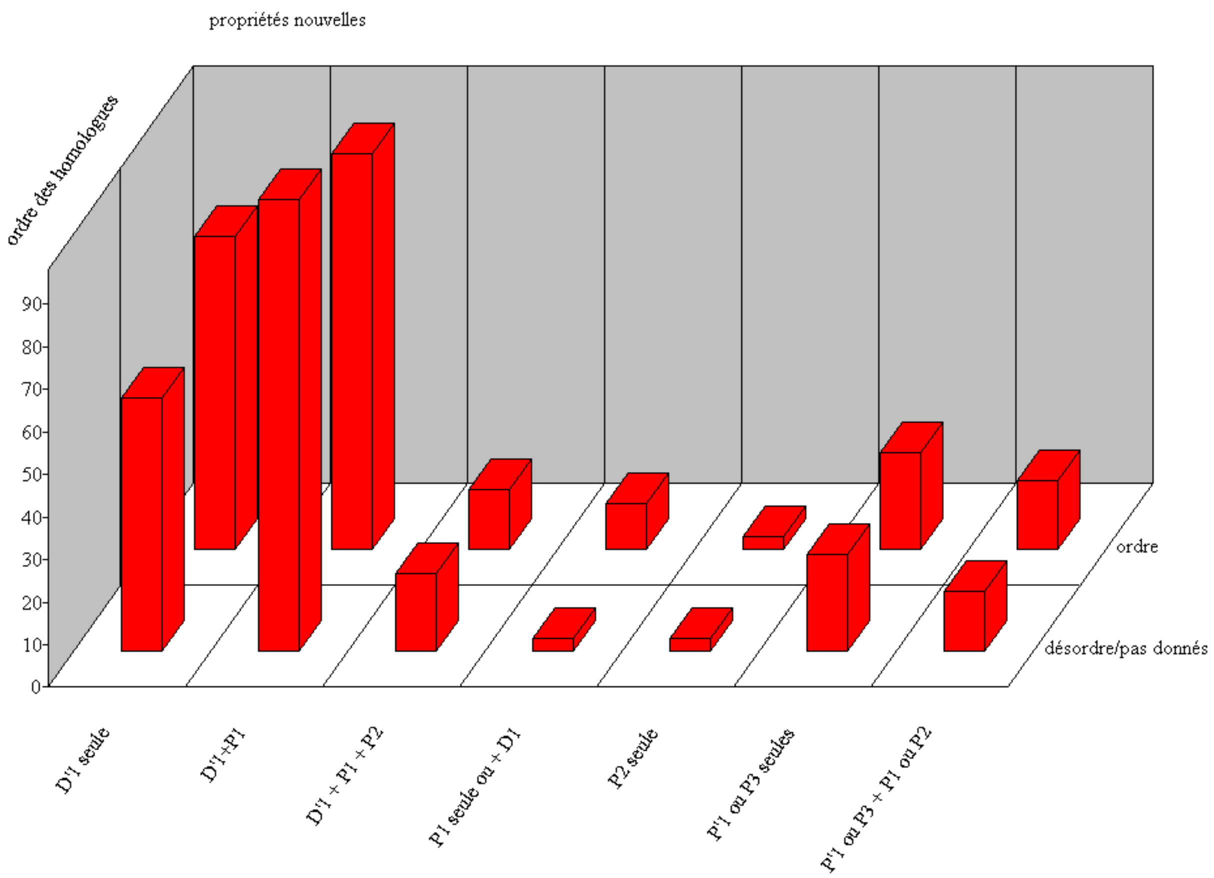


On note surtout une légère différence dans les exercices de contrôle, et plus subtilement dans les exercices faits à la maison, où les homologues sont donnés plus souvent dans le désordre, alors que ce n'est le cas ni dans les manuels, ni dans les exercices faits en classe. Il s'agit peut-être d'une volonté des professeurs de tester les élèves en contrôle sur le repérage.

Enfin, nous avons voulu voir s'il y avait un rapport entre les propriétés nouvelles et l'ordre des sommets. On peut voir que D'1 et P1 sont les seules propriétés du cours pour lesquelles les homologues sont le plus souvent donnés dans le désordre.

Ces deux propriétés sont les premières données dans le cours, D'1 est celle qui est la plus travaillée dans les manuels et chez les professeurs. Elle permet aux élèves de se familiariser avec la notion nouvelle, et avec le repérage des homologues, lorsqu'il est proposé.

La propriété P1 est rarement travaillée seule, sauf généralement pour s'entraîner au repérage des homologues à l'aide des longueurs. C'est certainement pourquoi on la trouve donnée avec les homologue dans le désordre.



De cette analyse des exercices, nous pouvons déduire qu'il n'y a pas de grande différence entre les manuels dans le traitement des homologues, seul HYPERBOLE privilégie nettement l'écriture dans le désordre. La configuration qui semble la plus propice au travail du repérage est celle des triangles "emboîtés", et la propriété qui permet ce travail semble être P1, mais D'1 aussi dans une moindre mesure.

A peu d'exceptions près (quelques exercices de repérage dans TRANSMATH et HYPERBOLE, la justification de l'écriture adoptée dans DELAGRAVE) aucun effort n'est fait dans les manuels pour prendre en charge le repérage des homologues qui, on l'a vu, pose pourtant un réel problème aux élèves, et qui n'est pas pris en charge non plus par les professeurs que nous avons observés. Comment expliquer cet "oubli" de la part des auteurs de manuels de mathématiques ? Et peut-on finalement envisager une telle prise en charge du problème, en l'état actuel des programmes scolaires, c'est-à-dire sans recours aux transformations ?

7) Analyse factorielle

Pour pouvoir mettre en regard un plus grand nombre de variables, nous avons choisi ici encore de travailler avec le logiciel SPAD à l'aide duquel nous avons réalisé une analyse factorielle à correspondances multiples[74].

Nous avons donc créé une base de données dans laquelle nous avons renseigné les informations codées concernant nos exercices de manuels, et nos énoncés relevés en classe. Le logiciel calcule ensuite les coordonnées optimales d'un espace qui représente au mieux ces données, en tenant compte de la distance entre nos différents points, et du poids que chacun de ces points dans la construction d'un tel espace. Nous avons ensuite remanié plusieurs fois le codage des données afin d'éliminer les classes de faible effectif, qui ne semblaient pas être significatives dans les calculs effectués au préalable par le logiciel (qui participaient en effet faiblement à la construction des axes notre espace).

Nous devons enfin déterminer les modalités qui participent le plus fortement à la création des axes factoriels, afin de pouvoir interpréter au mieux les graphiques donnés par le logiciel, qui sont obtenus en projetant nos points sur les plans formés par les axes principaux de notre espace. Dans ces graphiques, nous considérerons en général que les points qui sont proches représentent des individus (donc pour nous des exercices) qui sont proches eux aussi. Mais il faut rester très prudent dans ces interprétations : étant donné qu'il s'agit d'une projection de notre espace de points, nous ne pouvons nous contenter de l'observation d'un seul plan factoriel. Dans notre analyse, il semblerait que les trois premiers axes suffisent pour interpréter une grande partie des données.

[74] Méthode CORMU

HISTOGRAMME DES 11 PREMIERES VALEURS PROPRES

SOMME DES VALEURS PROPRES 2.7500

N°	VALEUR PROPRE	%	POURCENT CUMULE	
1	0.4671	16.99	16.9	***
2	0.3178	11.56	28.54	***
3	0.2803	10.19	38.74	***
4	0.2627	9.55	48.29	***
5	0.2525	9.18	57.47	**
6	0.2467	8.97	66.44	***
7	0.2311	8.40	74.84	**
8	0.2228	8.10	82.94	***************************************
9	0.1897	6.90	89.84	*********************************
10	0.1442	5.24	95.09	*************************
11	0.1352	4.91	100.00	************************

COORDONNEES,CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES MODALITES ACTIVES AXES 1 A 5

MODALITES			COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
LIBELLE	P.REL	DISTO	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3 . configuration																	
triangles	11.44	1.18	-0.81	-0.10	-0.26	-0.08	0.05	16.1	0.4	2.8	0.3	0.1	0.56	0.01	0.06	0.01	0.00
emboîtés	7.10	2.52	0.49	0.92	0.16	0.42	-0.33	3.7	19.0	0.7	4.7	3.1	0.10	0.34	0.01	0.07	0.04
cercle	6.46	2.87	0.90	-0.83	0.29	-0.32	0.27	11.1	14.0	1.9	2.4	1.9	0.28	0.24	0.03	0.03	0.03
			CONTRIBUTION CUMULEE =					30.9	33.4	5.4	7.4	5.1					
4 . mélange ancien/nouveau																	
ancien	16.96	0.47	0.43	-0.23	-0.10	-0.13	-0.05	6.7	2.7	0.7	1.1	0.1	0.39	0.11	0.02	0.04	0.00
pas d'ancien	8.04	2.11	-0.91	0.48	0.22	0.28	0.10	14.2	5.8	1.4	2.4	0.3	0.39	0.11	0.02	0.04	0.00
			CONTRIBUTION CUMULEE =					20.9	8.5	2.1	3.5	0.5					
5 . propriétés nouvelles																	
D'1 seule	7.22	2.46	-0.30	-0.93	0.23	-0.13	-0.97	1.4	19.6	1.4	0.5	27.2	0.04	0.35	0.02	0.01	0.39
D'1+P1	10.86	1.30	0.56	0.15	0.31	0.15	0.56	7.4	0.8	3.6	0.9	13.4	0.24	0.02	0.07	0.02	0.24
D'1 + P1 + P2	1.82	12.74	0.42	1.79	-1.28	-0.94	-1.81	0.7	18.4	10.7	6.1	23.6	0.01	0.25	0.13	0.07	0.26
P1 seule	0.82	29.43	-1.80	-0.13	-0.13	-2.45	2.30	5.7	0.0	0.1	18.8	17.3	0.11	0.00	0.00	0.20	0.18
P'1 ou P3	2.52	8.91	-0.67	0.07	-1.78	1.27	0.98	2.4	0.0	28.6	15.5	9.6	0.05	0.00	0.36	0.18	0.11
P'1 +P1 ou P2	1.76	13.20	-0.85	1.00	1.10	-0.08	-0.06	2.7	5.5	7.5	0.0	0.0	0.05	0.08	0.09	0.00	0.00
			CONTRIBUTION CUMULEE =					20.3	44.3	51.9	41.9	91.1					
9 . niveau de mise en fonctionnement																	
reconnaissance	6.51	2.84	-1.19	-0.17	0.61	-0.01	-0.16	19.7	0.6	8.8	0.0	0.6	0.50	0.01	0.13	0.00	0.01
intermédiaires	12.44	1.01	0.31	-0.01	-0.63	-0.36	0.06	2.6	0.0	17.7	6.0	0.2	0.10	0.00	0.40	0.13	0.00
étapes	4.87	4.13	0.72	0.59	0.88	0.19	0.21	5.4	5.4	13.5	0.7	0.8	0.12	0.09	0.19	0.01	0.01
choix	1.17	20.30	0.33	-1.45	-0.38	3.01	-0.60	0.3	7.8	0.6	40.4	1.7	0.01	0.10	0.01	0.45	0.02
			CONTRIBUTION CUMULEE =					27.9	13.8	40.6	47.1	3.3					

Nous pouvons déjà voir que certaines modalités contribuent fortement à la création des axes de l'espace sur lequel sont projetés nos données.

Pour l'axe 1, les configurations "triangles" et "cercle" contribuent, avec des coordonnées opposées, de même que la modalité "pas d'ancien" (coordonnée négative) et la modalité "reconnaissance des modalités" pour le niveau de mise en fonctionnement (coordonnée négative). L'axe 1 semble donc opposer particulièrement les variables de nos exercices qui tendent à les rendre faciles ou difficiles – selon nous.

Pour l'axe 2, on voit s'opposer les configurations "emboîtés" et "cercle" et les propriétés "D'1 seule" ou la combinaison complexe "D'1+P1+P2". C'est peut-être en terme de complexité qu'il faudra interpréter l'axe 2.

Pour constituer l'axe 3 enfin, on voit s'opposer les niveaux de mise en fonctionnement "étapes" et "intermédiaires", ainsi que certaines des propriétés nouvelles.

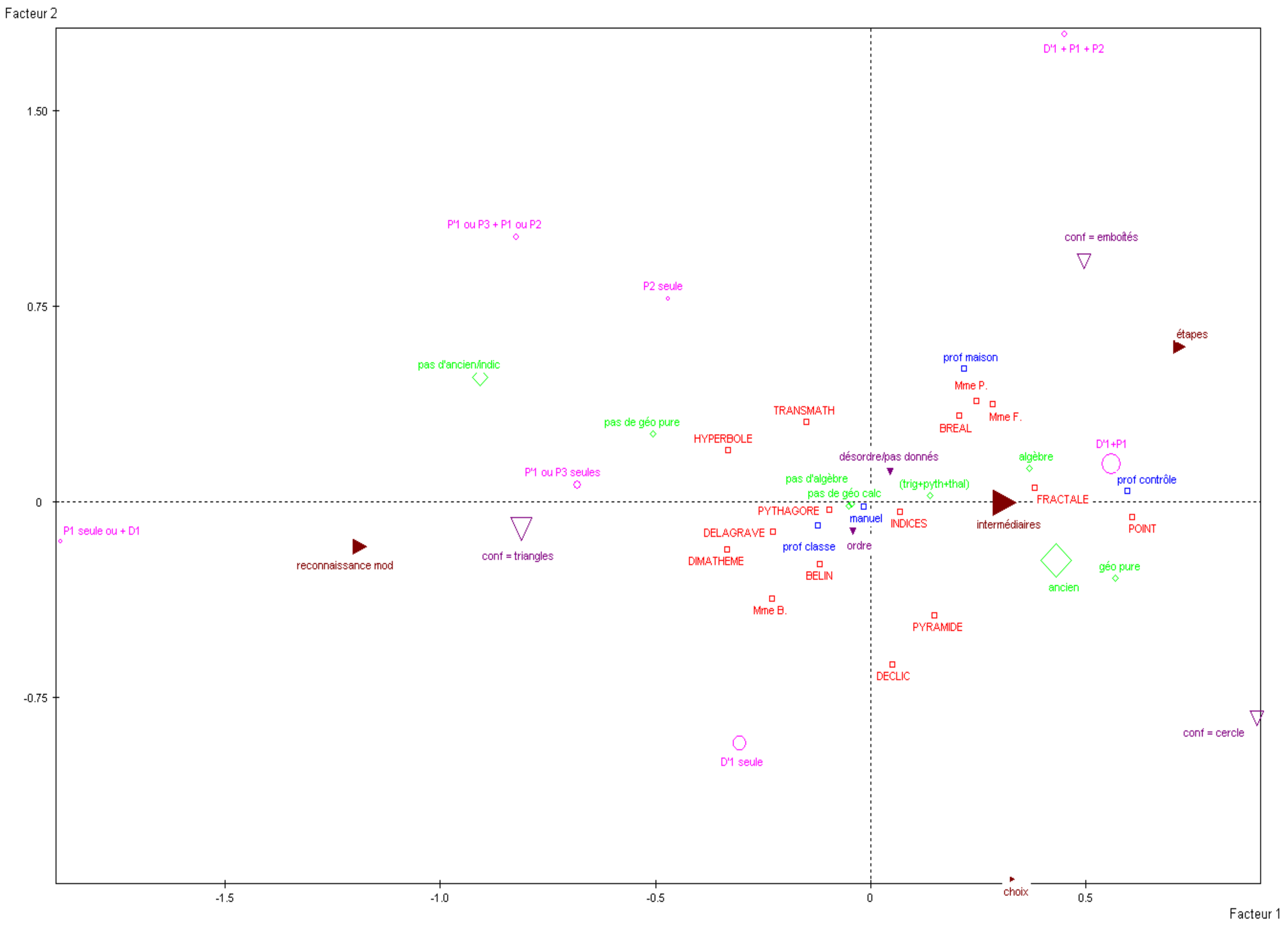
Les autres modalités s'inscrivent elles aussi sur les axes obtenus, nous permettant de situer nos différents exercices dans l'ensemble de nos données, en fonction de leurs caractéristiques. Les chiffres correspondant aux coordonnées des autres modalités sont donnés en annexe[75].

[75] voir ANNEXES : analyse de données : coordonnées et valeurs-test des modalités axes 1 à 5

projection sur les axes 1 et 2

axe 1 : 16,99 %

axe 2 : 11,56 %



Les manuels se démarquent plus ou moins les uns des autres. Certains proposent des exercices plus complexes[76] : configurations ou NMF plus compliqués, mélange avec algèbre ou géométrie pure (ensemble de droite). Et d'autres sont plus simples (à gauche) : pas de mélange, NMF et configuration simples. Cela nous permet aussi par la même occasion de situer nos professeurs : Mme B. (à gauche) fait faire des tâches plus simples que Mmes P. et F. (à droite).

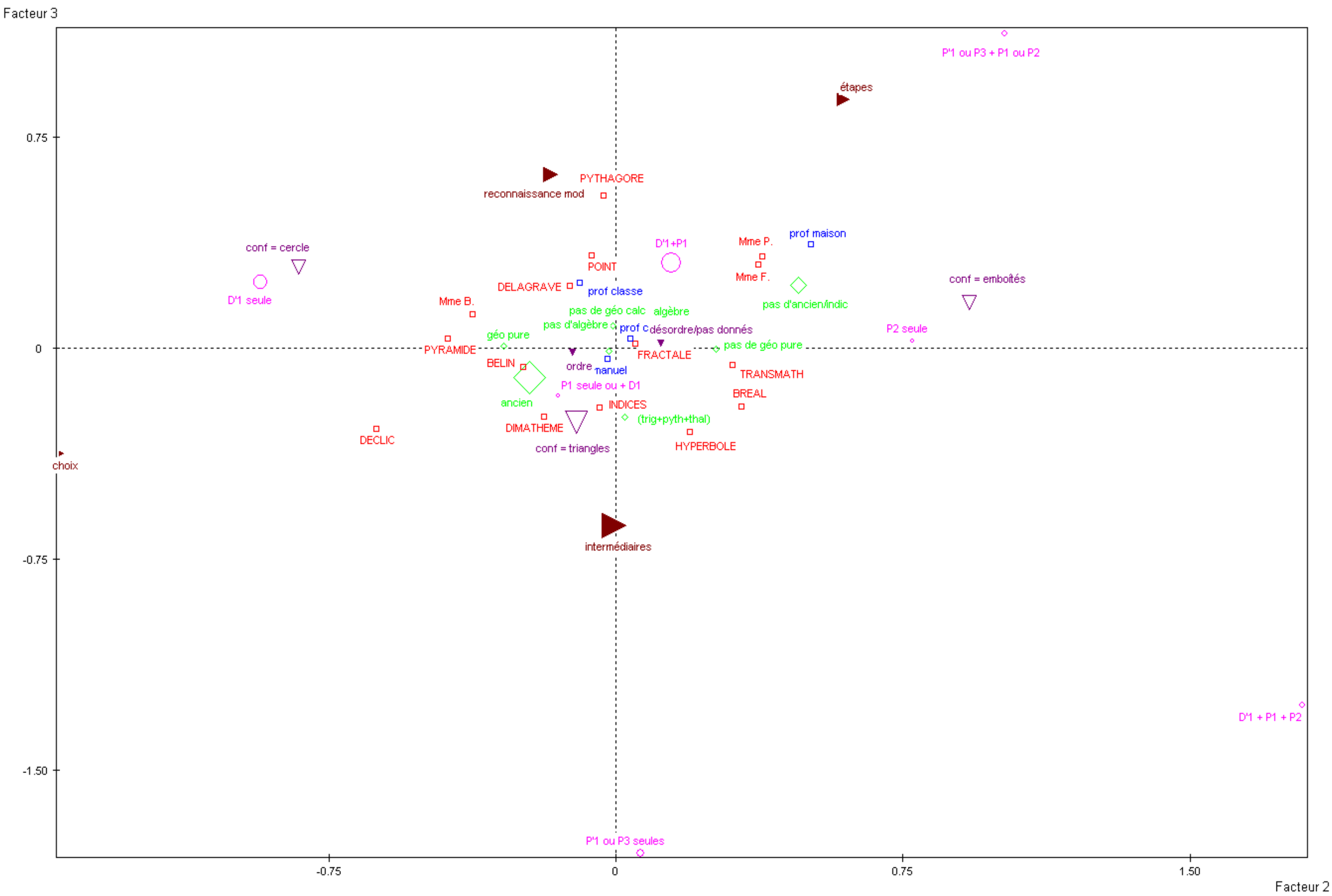
[76] dans l' "ordre croissant de complexité" sur l'axe 1 : Dimathème, Hyperbole, Delagrave, Transmath, Belin, Pythagore, Declic, Indices, Pyramide, Bréal, Fractale et Point.

L'axe 2 semble opposer le travail de l'aire (P2 seule ou mélangée à d'autres propriétés) à celui des longueurs (au milieu) et à celui des angles (D'1 en bas), caractérisé chacun par une configuration.

projection sur les axes 2 et 3

axe 2 : 11,56 %

axe 3 : 10,19 %



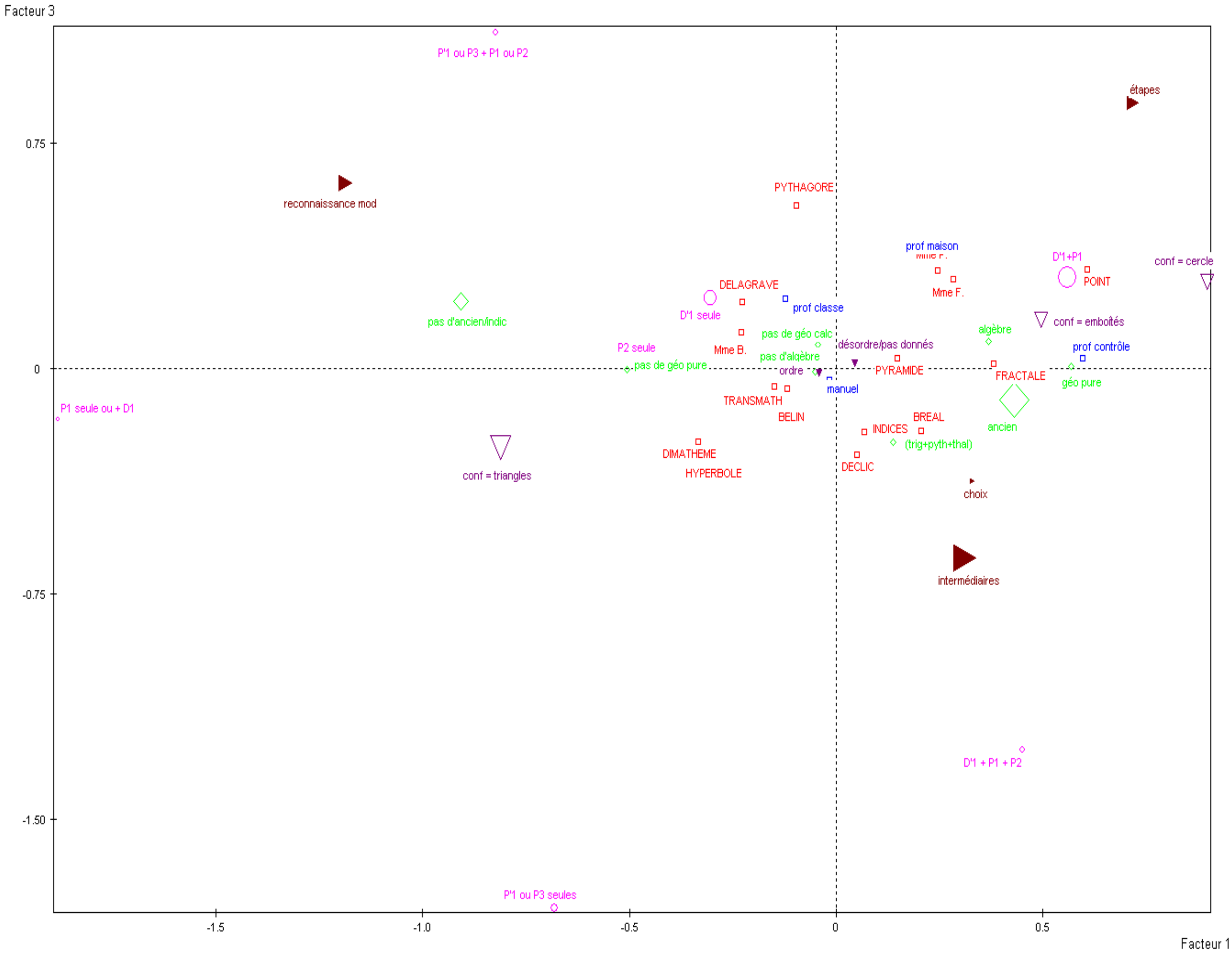
Sur l'axe 2, on voit bien s'opposer les exercices portant sur les angles (configuration "cercle", application de D'1 et mélange avec de l'ancien, surtout de la géométrie pure), ceux portant sur les longueurs et les aires (configuration "triangles" et application de P'1 ou P3) et enfin ceux portant sur les aires (configuration "emboîtés" et application de P2 sans géométrie pure).

Les manuels et les professeurs se partagent donc en trois catégories, en fonction du fait qu'ils proposent ou non le travail sur les aires (à droite), les longueurs (au milieu) ou seulement sur les angles (à gauche). On peut voir aussi les caractéristiques attachées à ces deux types de travail :

les homologues dans l'ordre et le mélange avec l'ancien pour le travail des angles, et en particulier la géométrie pure, et de l'autre côté, l'absence d'ancien et les homologues plutôt dans le désordre.

L'axe 3 est plus difficile à déchiffrer. Il peut peut-être s'interpréter en fonction du type d'exercice, puisqu'on voit s'opposer les exercices trouvés dans les manuels à ceux donnés par les professeurs. Il est probable que ces deux types d'exercices s'opposent en tout cas en terme de variété : il y a dans les manuels bien plus d'exercices que ce qui peut être donné en classe dans la durée du chapitre.

projection sur les axes 1 et 3



Cette analyse nous permet donc de caractériser nos différents manuels, de déterminer lesquels sont proches, mais aussi de mettre en avant les différentes stratégies dont ils font preuve., et les manques éventuels qu'on peut y déceler, tant dans les pages de cours (pas de prise e, charge du repérage des homologues) que dans les exercices (certaines propriétés sont beaucoup moins représentés).

8) L'outil triangles semblables

Nous nous intéressons ici aux triangles semblables en tant qu'outil pour résoudre des problèmes. Nous regardons dans les manuels les types de problèmes que l'on peut trouver dans ce chapitre, et nous envisageons d'autres méthodes qui permettent de résoudre ces problèmes. Nous verrons ainsi d'une part à quoi servent les triangles semblables, selon les manuels, et d'autre part s'ils sont indispensables à la résolution des problèmes que nous aurons trouvés.

a) types de problèmes et autres méthodes

Nous recensons ici les exercices donnés en classe par les 5 professeurs observés et les exercices trouvés dans les manuels pour lesquels les triangles semblables constituent un outil pour résoudre un problème. Il y en a assez peu. Pour ceux dont nous avons déjà réalisé une analyse de tâche, nous nous contentons de donner l'énoncé. Pour les autres, nous donnons une résolution succincte à l'aide des triangles semblables. Nous donnons aussi les autres de méthodes de résolution, s'il y en a, même si elle ne sont pas toujours accessibles au niveau de la classe de 2nde.

- ce sont en particulier des problèmes de calcul de longueurs caractéristiques d'une figure :

Démonstration du théorème de Pythagore (Mme B. et Mme P.)

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A

a) y a-t-il des triangles semblables parmi ABC, ABH et ACH ?

b) démontrer que $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times CB$, $AH^2 = HB \times HC$

c) applications : construire un segment de longueur $\sqrt{7}$ uniquement à la règle et au compas (utiliser la 3ème égalité du 2)

e) donner une démonstration du théorème de Pythagore

Cet exercice, donné en classe par Mme P. pourrait être résolu aussi à l'aide des **aires**.

Puissance d'un point par rapport à un cercle (Mme P.) :

Soit un cercle de centre; placer un point M et tracer deux cordes quelconques passant par M notées [AB] et [CD].

1) démontrer que MA x MB = MC x MD (on note p ce nombre)

2) calculer p, comment varie-t-il lorsque la distance OM varie ?

ou dans (Pythagore 2nde, 53 p 191) (Mme F.) :

A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon R, (AB) et (CD) se coupent en M, (MO) recoupe le cercle en E et F

a) montrer AMD et CMB sont semblables, en déduire que MA x MB = MC x MD

b) montrer que ME x MF = MO^2-OE^2

c) on pose OM = d, déduire que MA x MB ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à d^2-R^2

d) (MT) tangente en T au cercle, montrer que MA x MB = MT^2

ou chez M. P. :

soit un cercle de centre O, une sécante passant par M qui coupe le cercle en A et B, le cercle de diamètre OM recoupe le précédent cercle en T.

en utilisant les triangles semblables, montrer que MT^2 *= MA x MB*

1) démontrer que la droite (TM) est tangente au cercle

2) démontrer que les triangles ATM et BTM sont semblables

Cet exercice assez classique – qu'on retrouve chez 3 des professeurs observés avec des énoncés différents – peut aussi se résoudre à l'aide du **produit scalaire**, mais cette méthode n'est pas accessible en classe de 2^{nde}.

Position d'un point (d'après Pythagore 2nde, 32 p 188) (Mme F.)

A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC ; G est le point d'intersection des médianes (BB') et (CC').Montrer que G est aux 2/3 des médianes

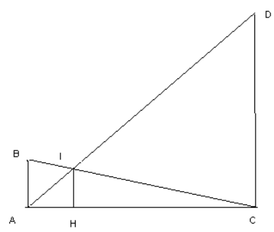
L'utilisation des triangles semblables pour cet exercice est plutôt absurde : le résultat obtenu précède à la notion de triangles semblables, et ne peut donc être démontré par leur intermédiaire. On peut le démontrer en revanche à l'aide de vecteurs et de barycentres.

Longueur constante (Mme P.) :

deux règles de 4cm et de 12 cm sont placées verticalement sur un plan horizontal, chaque règle est reliée à l'autre par un élastique qui joint son sommet au pied de l'autre. On cherche à savoir à quelle hauteur se croisent les élastiques et comment varie cette hauteur lorsqu'on déplace les règles.

1) Calculer IC en fonction de BC.

2) Trouver alors IH et conclure



Ici les triangles semblables permettent de caractériser une longueur constante dans une configuration particulière (comme dans l'exercice précédent d'ailleurs). On aurait pu résoudre en faisant uniquement des calculs de longueurs avec le théorème de **Pythagore**. Il est possible qu'ici, le fait d'utiliser les triangles semblables autorise à moins de calculs littéraux.

Théorème de Ptolémée (Mme S.) :

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans le cercle Γ, comme le montre la figure ci-contre.

K est le point du segment [AC] tel que ABD = KBC.

a) montrer que les triangles ABD et KBC sont semblables.

En déduire l'égalité AD x BC = KC x BD

b) de la même façon, trouver un produit égal à AB x CD, en montrant que les triangles ABK et DBC sont semblables.

c) en déduire le théorème de Ptolémée : "si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, alors le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés".

On peut aussi résoudre ce problème posé par Mme. S. avec une similitude directe, par un calcul avec les nombres complexes.

Rapport de longueurs caractéristique (donné en contrôle par Mmes P., F. et S et M. P.) :

(C) est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans (C) tel que l'angle BAC soit aigu. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).

a) démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables

b) on pose AB = c, AC = b et AH = h, déduire de la question précédente que bc = 2rh

c) on pose BC = a et on appelle s l'aire du triangle ABC, démontrer que abc = 4rs

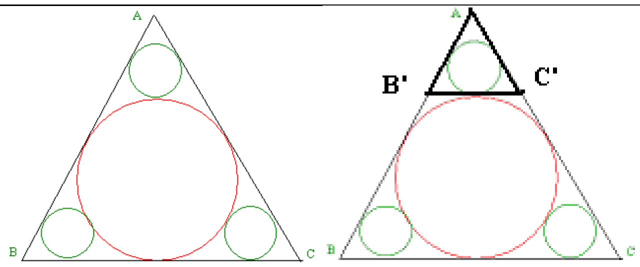
Cet exercice est aussi un classique, posé en contrôle par quatre des professeurs observés. Il peut se résoudre tout aussi rapidement par un **calcul trigonométrique**, grâce à l'égalité des angles obtenue par la théorème de l'angle inscrit. Le fait d'utiliser ici les triangles semblables n'est pas particulièrement pertinent.

Problème de longueur (Hyperbole)

ABC est un triangle équilatéral, le cercle inscrit dans ABC a pour rayon 3 cm.

Les petits cercles sont tangents au grand cercle et aux côtés du triangle ABC.

Quel est le rayon de chaque petit cercle ?

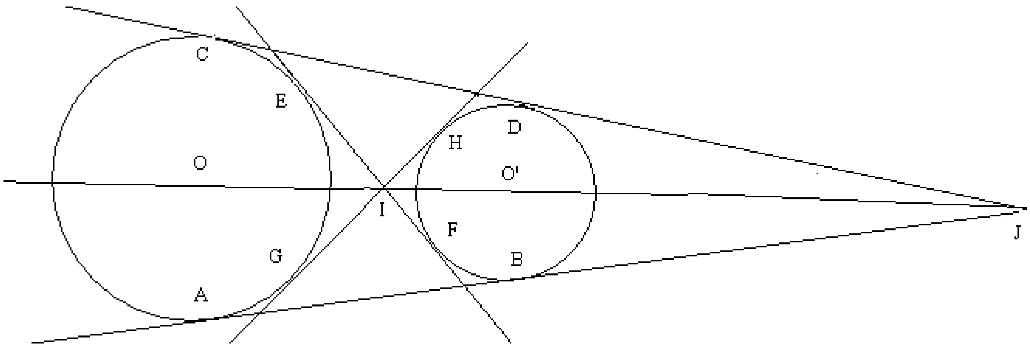


Ici il faut montrer que le triangle AB'C' obtenu en traçant la tangent commune à un petit et un grand cercle, est un triangle semblable au triangle ABC. Pour cela, on utilise la symétrie de la figure et la propriété D'1. De plus, comme le centre du cercle inscrit est ici aussi le centre de gravité, donc aux 2/3 du segment, la hauteur du triangle ABC mesure 9 cm, et celle de AB'C' mesure 3 cm. Donc le rapport de similitude est de 1/3, et par conséquent le rayon du petit cercle est de 1cm.

Cet exercice peut aussi être résolu à l'aide d'une **homothétie** centrée sur l'un des sommets du triangle et de rapport 1/3 à calculer à l'aide de la hauteur du triangle et du rayon du cercle inscrit.

Problème de longueurs (Fractale)

Le cercle (C) a pour rayon 3,5 cm et pour centre O, le cercle (C') a pour rayon 1,5 cm et pour centre O'. La longueur OO' est égale à 7 cm. On trace les tangentes communes aux deux cercles. Calculer les longueurs IJ, AB et EH.



On peut utiliser ici encore les triangles semblables pour déduire des rapports de longueurs, puis les longueurs demandées. Pour IJ, on peut considérer les triangles JO'B et JOA qui sont semblables (2 angles égaux), puis les triangles IOG et IO'H qui sont eux aussi semblables. Cela nous donne les positions de I et J par rapport à O et O' et nous permet de calculer IO' = 2,1cm et JO' = 5,25cm donc IJ = 7,35cm.On peut ensuite calculer la longueur JB à l'aide de Pythagore, et déduire la longueur AB en utilisant les rapports de longueurs des triangles JO'B et JOA. Pour EH enfin, on utilise les triangles IOE et IO'F et la symétrie de la figure.

Les triangles considérés étant à chaque fois dans la configuration du **théorème de Thalès**, il n'est pas nécessaire de faire intervenir les triangles semblables ici, les rapports découlant du théorème suffisent pour calculer les longueurs.

- On trouve aussi des problèmes de calculs, de comparaison ou d'optimisation d'aire :

Comparaison d'aires (Delagrave)

Deux triangles équilatéraux sont inscrits dans des cercles de rayons 4 et 6 cm. Comparer leurs aires.

On utilise le fait que les triangles sont semblables et que le rapport de similitude est égal au rapport des rayons qui vaut 2/3. (on peut le démontrer en utilisant les triangles définis par l'une des hauteurs, car les hauteurs ont pour longueur 1,5 fois le rayon, les côtés des deux triangles sont donc dans la même proportion que les rayons) . Le rapport des aires est donc $(2/3)^2$ d'après P2.

Rapport d'aires (Mme P.)
ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC]
démontrer que (aire ABH) / (aire AHC) = $(\tan C)^2$

On peut résoudre ici en utilisant uniquement des calculs trigonométriques. L'utilisation des triangles semblables ici simplifie peut-être un peu la démarche de comparaison des rapports de longueurs.

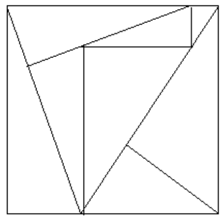
PB Euclide (Mme P.):
soit ABC un triangle, comment tracer M et N sur les segments [AB] et [AC] pour que (MN)//(BC) et que l'aire de AMN soit la moitié de celle de ABC ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation d'aire. Il peut aussi se résoudre à l'aide du théorème de Thalès, étant donnée la configuration dans laquelle se trouvent les triangles.

Rapport d'aires (Mme P.) :
soit un triangle ABC tel que l'angle A mesure 60°, les hauteurs issues de B et C coupent les côtés en H et K, déterminer le rapport des aires de AKH et ABC

Ici la similitude des triangles facilite le calcul des aires, avec la propriété P2. on aurait pu résoudre aussi dans le **plan complexe** avec un repère bien choisi, mais c'est plutôt plus compliqué.

Problème d'aire (Hyperbole)
On souhaite reconstituer un carré avec huit triangles rectangles tous différents, mais de même forme, et tels que le plus grand côté de l'angle droit de chacun soit le double du petit côté de l'angle droit. De plus, toutes les aires des rectangles exprimées en cm² sont des nombres entiers. Quelle est la valeur minimum de l'aide du carré, exprimée en cm² ?



Dans cet exercice, il s'agit en fait d'un problème d'arithmétique. Si on note a et 2a les côtés de l'angle droit pour l'un des rectangles, son aire vaut a^2, et pour qu'elle soit entière, il faut que a soit lui aussi entier. Comme les triangles doivent être tous différents, l'aire minimale du carré qu'ils compose sera égale à la somme des carrés des 8 premiers entiers. Ici les triangles semblables sont plus un prétexte pour faire faire de l'arithmétique.

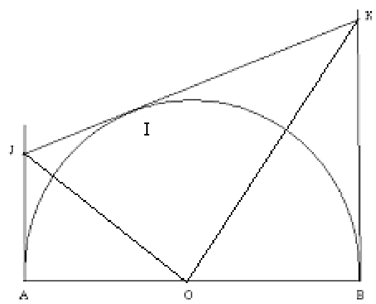
- on trouve aussi quelques problèmes d'orthogonalité ou d'alignement :

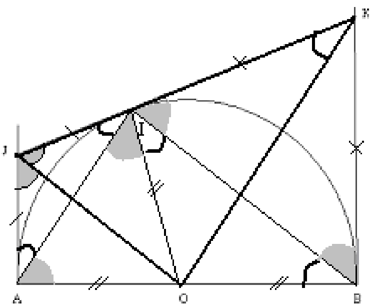
Euler (Fractale)
ABC est un triangle non équilatéral, on appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], A1, B1 et C1 les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G est son centre de gravité et H son orthocentre. La droite (OG) coupe la droite (AA1) en K et la droite (BB1) en K'.
a) démontrer que les triangles AGK et A'GO sont semblables
b) démontrer que les triangles BGK' et B'GO sont semblables
c) déduire une relation entre les longueurs GK et GO, puis entre GK' et GO.
d) que peut-on conclure concernant les points K, K' et H ?
e) en déduire que les points O, G et H sont alignés et que GH = 2 GO

On utilise ici les triangles semblables pour démontrer des rapports de longueurs et obtenir la position des points de la figure sur certains segments. Il s'agit d'un classique de la géométrie, et il y a beaucoup d'autres méthodes pour le démontrer. Par exemple en utilisant les **vecteurs et**

barycentres, avec ou sans **coordonnées**, ou encore avec une **homothétie** de centre G et de rapport - ½ . Les triangles semblables ne représentent pas un apport considérable pour la résolution de ce problème.

Problème d'orthogonalité (Pyramide et Delagrave)
Les trois tangentes au cercle de diamètre [AB] et de centre O sont les droites (AJ), (BK) et (JK). Montrer que le triangle OKJ est rectangle.





Ici il suffit de démontrer que JOK et AIB sont des triangles semblables, pour cela on prouve les égalités d'angles. On peut d'ailleurs se contenter ici de considérations sur les angles pour résoudre.

- enfin, on trouve quelques problèmes de construction :

Problème de construction (Delagrave)
ABC est un triangle donné et (C) un cercle donné. Construire un triangle MNP semblable au triangle ABC inscrit dans (C)

Il s'agit ici d'un problème qui peut se résoudre à l'aide des triangles semblables (on trace le cercle circonscrit au triangle, puis on le reporte dans le cercle donné de manière à ce qu'il soit tangent intérieurement au cercle circonscrit. On obtient le triangle demandé en prolongeant les côtés du triangle. Il faut évidemment justifier la construction. On peut ici résoudre de manière plus économique (notamment en ce qui concerne la justification) en utilisant une **homothétie**.

Problème de parallélisme (Delagrave)
ABC est un triangle, D un point du segment [BC]. Les parallèles à (AB) et (AC) passant par D coupent respectivement (AC) en E et (AB) en F. où faut-il placer D pour que les droites (EF) et (BC) soient parallèles ?

Il s'agit d'un problème de construction qui peut se résoudre ici à l'aide des triangles semblables. Supposons que le problème est résolu, on a alors une configuration dans laquelle on peut repérer trois triangles semblables au triangle ABC (à l'aide des angles correspondants), on peut alors écrire les rapports de longueurs, et en les combinant, on arrive à la conclusion que le point D doit être le milieu de [BC]. On peut aussi résoudre ce problème en utilisant uniquement le **théorème de Thalès**, étant donnée la configuration dans laquelle se trouvent les triangles.

On trouve donc surtout des problèmes ayant trait aux longueurs et aux aires, et plus rarement des problèmes de construction de figures de même forme, qui peuvent se résoudre à l'aide des triangles semblables. On ne trouve pas de problème relatif aux angles dans les manuels, et, très rarement, quelques problèmes d'alignement ou d'orthogonalité.

- Les triangles semblables constituent-ils la seule méthode "efficace[77]" pour résoudre les problèmes proposés dans ce chapitre ?

Nous avons vu qu'il existait souvent d'autres méthodes (géométriques ou analytiques) pour démontrer ces exercices. On peut utiliser généralement des propriétés permettant de calculer des longueurs (les formules trigonométriques, et les théorèmes de Pythagore, Thalès qui sont d'ailleurs à l'origine des démonstrations sur les triangles semblables), ou encore les vecteurs et barycentres lorsqu'il s'agit de déterminer la position d'un point, ou bien avec les transformations (et en particulier l'homothétie) dans le plan réel ou le plan complexe, pour les problèmes de construction. La connaissance des triangles semblables n'est donc pas indispensable ici pour résoudre.

Dans les problèmes de calculs de longueurs ou d'aires, lorsque les angles ne sont pas connus, il est souvent plus fastidieux d'obtenir les rapports nécessaires à la résolution à l'aide du Théorème de Pythagore. En revanche, dans la configuration de Thalès, les triangles semblables sont superflus. De même, lorsqu'il est possible d'utiliser les angles, en particulier avec la trigonométrie ou avec les angles complémentaires, il peut être intéressant de se passer des triangles semblables.

[77] En tout cas relativement rapide à énoncer et à justifier

L'utilisation des homothéties dans certains problèmes est avantageuse, en particulier dans les exercices de constructions, et ceux dont la configuration comporte des cercles, car la théorie qui accompagne les transformations permet de ne pas avoir à justifier autant la démonstration.

Il y a finalement peu d'exercices dédiés aux triangles semblables, et, même si ceux-ci permettent la caractérisation de certaines grandeurs des figures géométriques, il y a toujours une autre façon de faire, parfois même de façon plus efficace.

Nous nous sommes demandé, pour approfondir encore la question de l'utilité des triangles semblables, si certains exercices du chapitre ne devenaient pas triviaux lorsqu'on les abordait avec un logiciel de géométrie dynamique, ou alors si au contraire pour certains problèmes, le mouvement des points et des figures, rendu possible par le logiciel, faciliterait le repérage des sommets homologues.

b) Résolution avec un logiciel de géométrie dynamique

Nous avons donc regardé comment résoudre quelques-uns de nos exercices du chapitre – les plus classiques mais aussi d'autres exercices où le repérage des homologues était problématique – à l'aide des logiciels GEOPLAN[78] et CABRI[79].

Exercice classique avec la configuration "cercle"

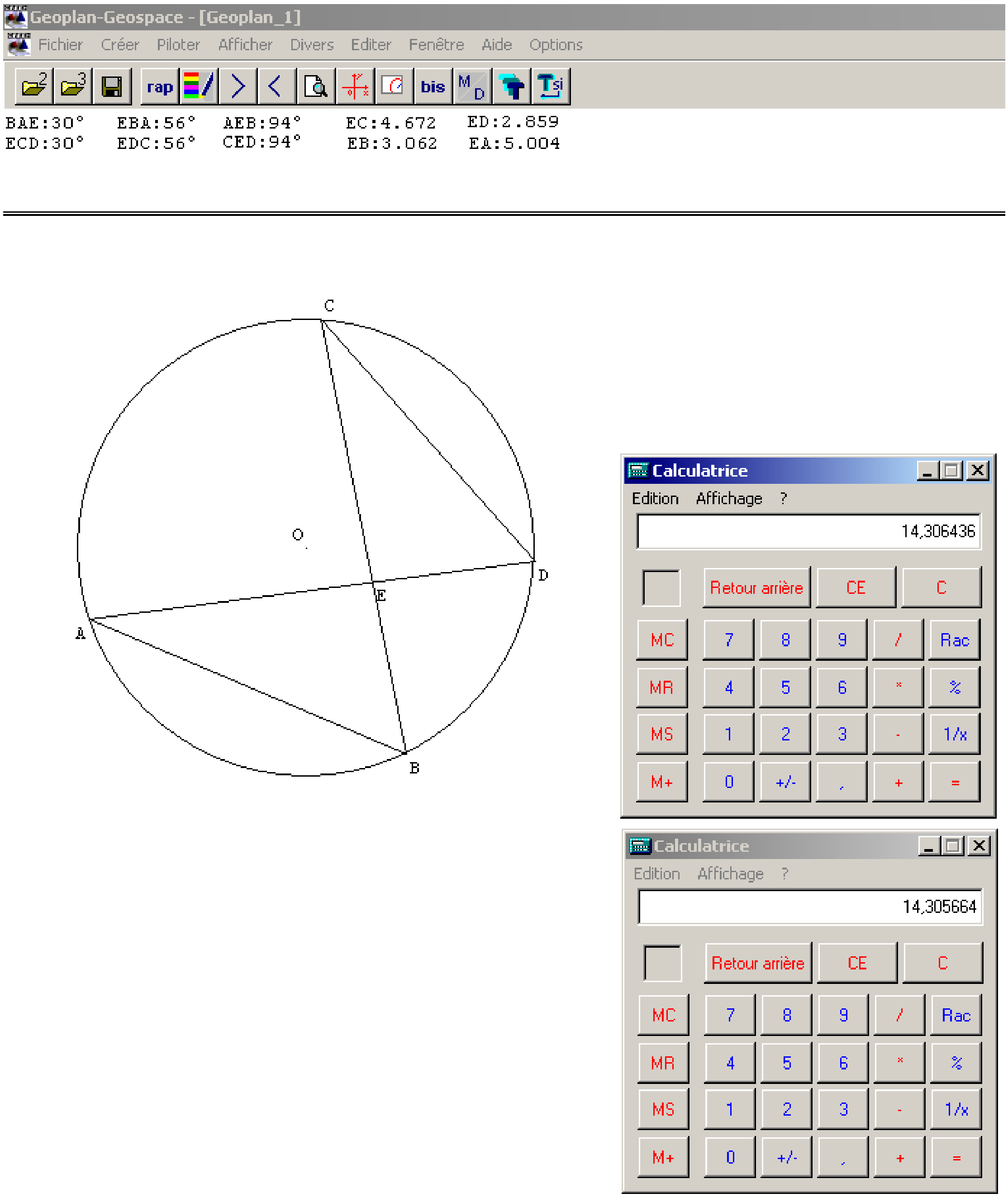
1) Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.

2) En déduire que EB x EC = ED x EA

On trace la figure dans GEOPLAN en définissant des points libres sur un cercle donné. On crée aussi des affichages pour les mesures des angles et des longueurs de la figure. Le repérage des homologues peut alors se faire facilement avec les mesures d'angles affichées.

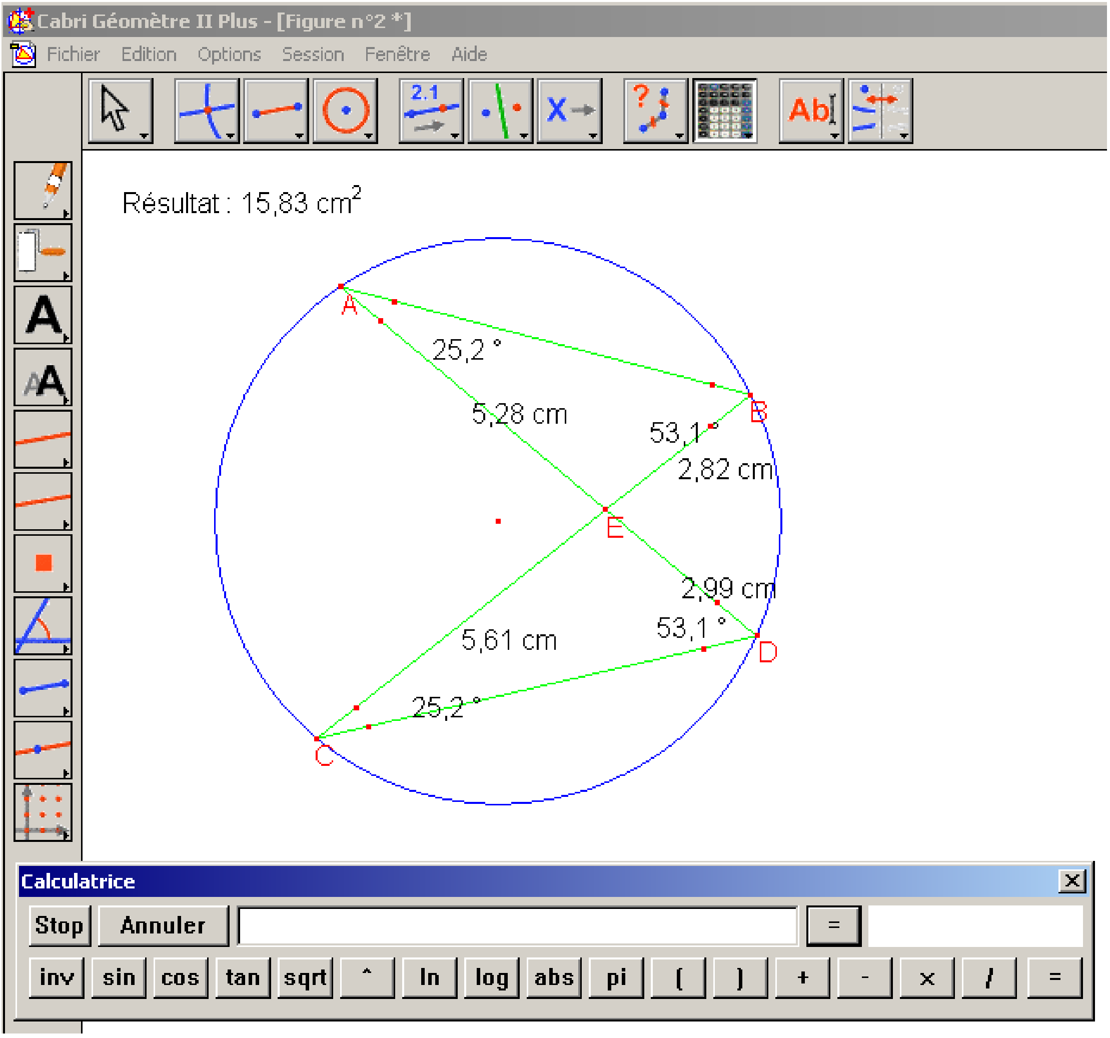
[78] GeoplanW est un logiciel qui permet de définir et de manipuler des objets géométriques et numériques. Il a été créé par le CREEM (Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques). Voir http://www2.cnam.fr/creem/GeoplanW/geoplanw.htm

[79] Cabri-géomètre est un logiciel de géométrie destiné principalement à l'apprentissage des mathématiques en milieu scolaire, développé par Cabrilog. Voir http://www.cabri.net/cabri2/accueil.php



Ici le fait d'afficher les angles de la figure permet de repérer facilement les sommets homologues et de déduire la similitude. Pour démontrer la question 2) en revanche, il faut faire des calculs "à la main", et la précision des mesures dans GEOPLAN ne permet pas de conclure à l'égalité.

Avec CABRI, le tracé de la figure est plus facile, mais cette fois-ci la précision des mesures de longueurs nous permet de vérifier numériquement l'égalité demandée.



Il n'y a pas dans GEOPLAN ou CABRI de fonction permettant de comparer des longueurs ou des angles sans passer par leurs valeurs. Ces logiciels ne permettent donc pas ici de travail sur les angles géométriques.

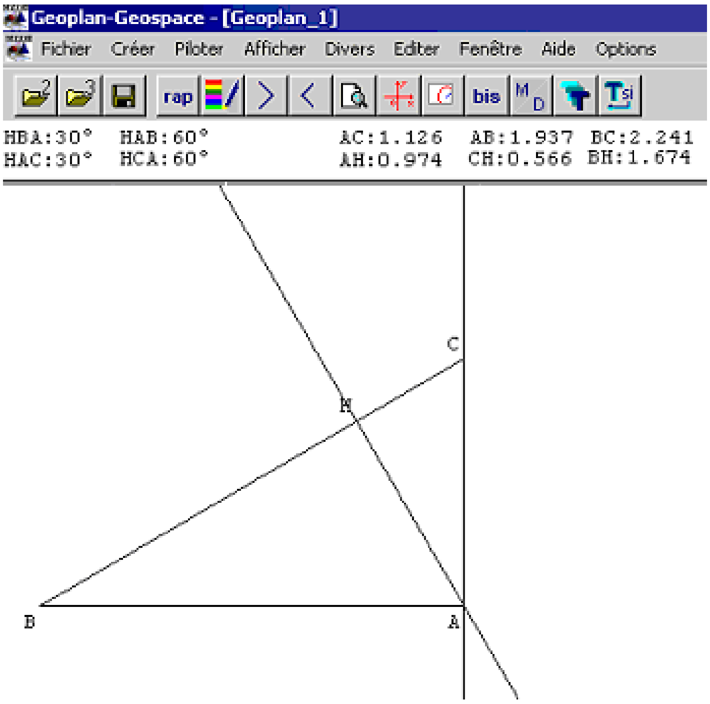
Exercice classique avec la configuration "emboîtés"

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A

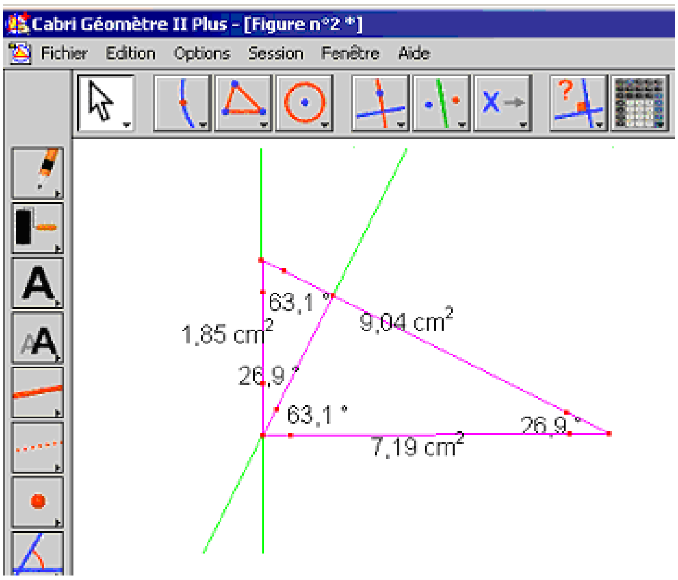
1) y a-t-il des triangles semblables parmi ABC, ABH et ACH ?

2) démontrer que $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times CB$, $AH^2 = HB \times HC$

Ici encore GEOPLAN permet de comparer les angles, mais pas de déduire les résultats sur les longueurs. Le tracé de la figure n'est pas non plus très évident avec le logiciel, qui ne propose pas de fonction pour tracer directement les triangles.



Avec CABRI, le tracé de la figure est un peu compliqué lui aussi, mais les mesures qui sont données permettent de vérifier l'égalité la similitude (égalité des angles) et de calculer les égalités de longueurs demandées.



Les deux logiciels permettent de comparer avec plus ou moins de précision les angles et les longueurs, mais ne mettent pas en avant l'utilisation des triangles semblables pour la démonstration.

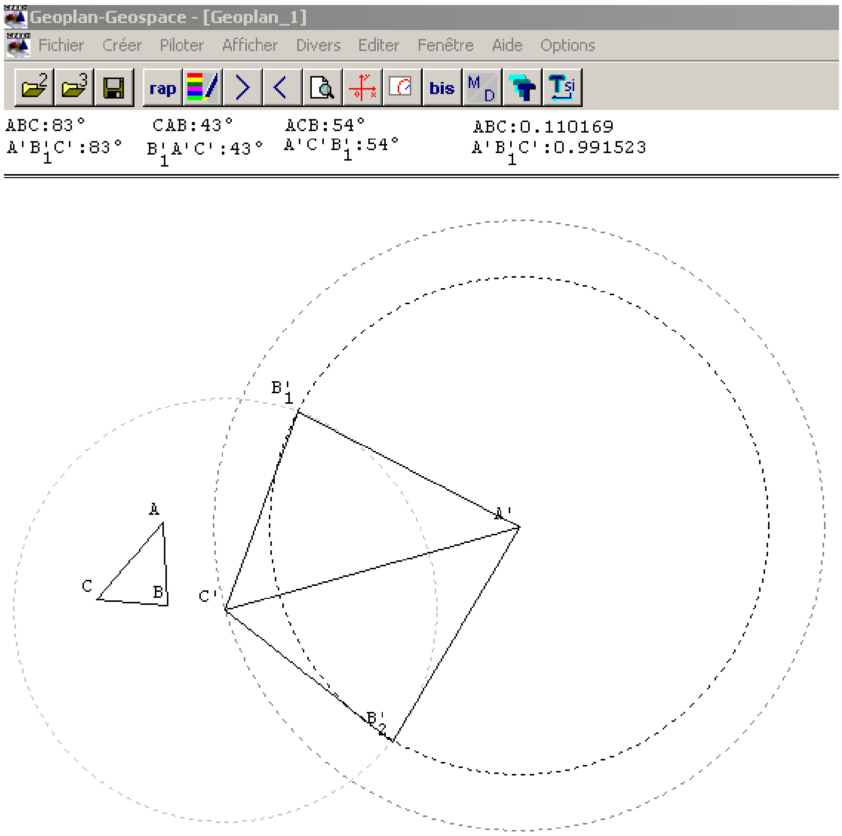
Exercice sur P'1 (longueurs) et P2 (aire)

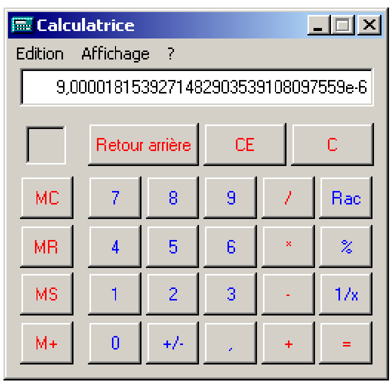
ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que A'B' = 3AB, A'C' = 3AC, B'C' = 3BC

1) démontrer que ABC et A'B'C' sont semblables

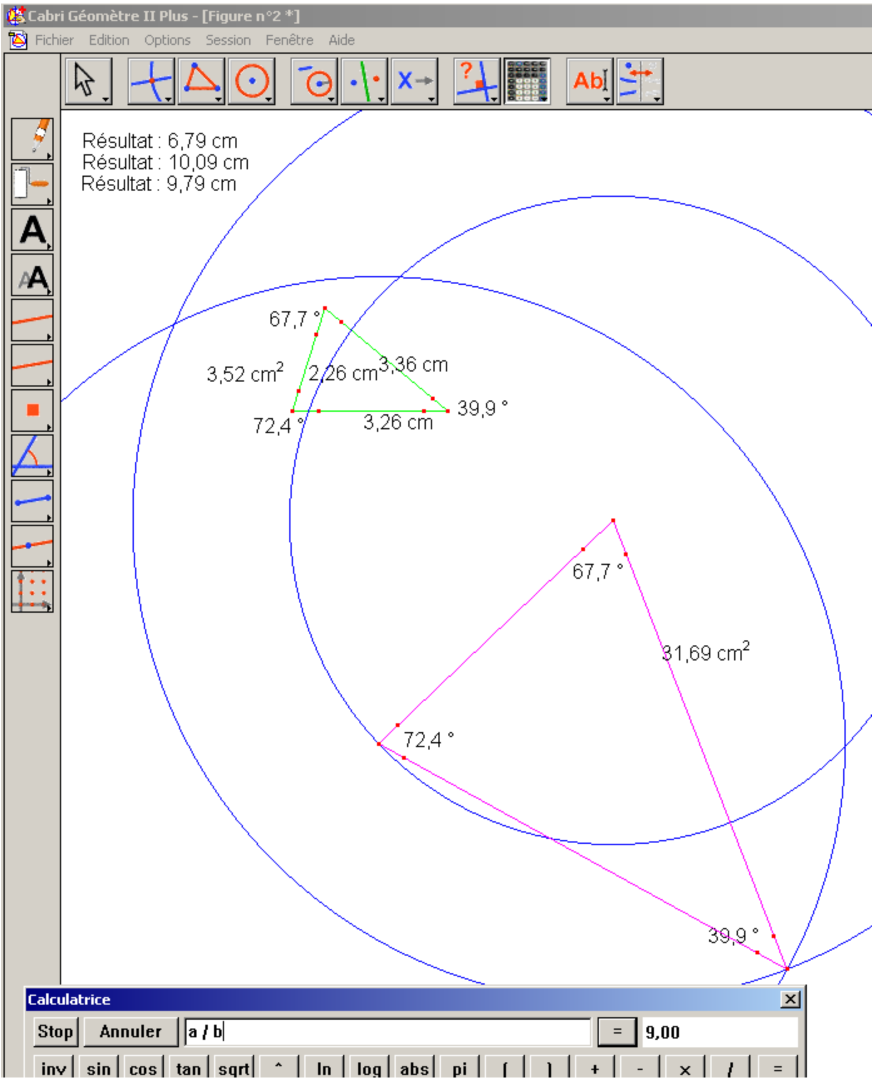
2) comparer les aires des deux triangles.

La construction de la figure requiert ici beaucoup de manipulations avec GEOPLAN, surtout si on n'utilise pas d'homothétie pour tracer le deuxième triangle à partir du premier. L'affichage des mesures des angles nous donne encore l'égalité, mais l'imprécision de l'affichage des aires ne permet pas de conclure.





La construction de la figure avec CABRI demande à peu près les mêmes étapes. Mais le calcul avec les valeurs exactes des longueurs permet un calcul précis du rapport des aires.



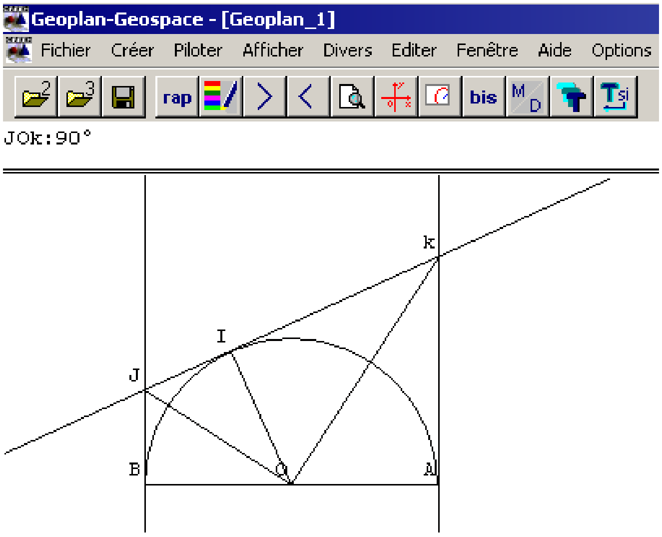
Pour ces deux exercices, qui consistent à calculer des rapports de longueurs ou d'aires, CABRI donne donc des résultats numériques suffisamment précis pour obtenir les égalités, lorsqu'elles existent. Mais aucun de ces deux logiciels ne permet de donner une preuve générale de ces résultats.

Problème d'orthogonalité (Pyramide et Delagrave)

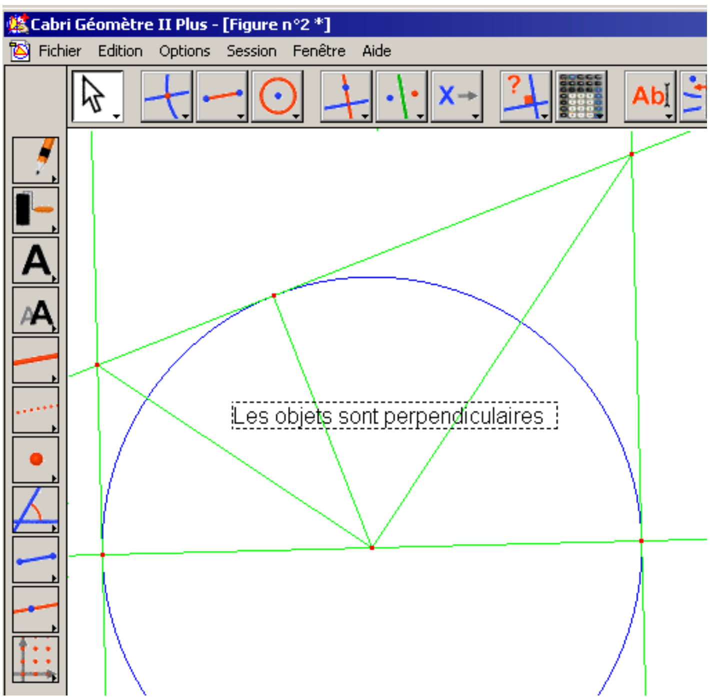
Les trois tangentes au cercle de diamètre [AB] et de centre O sont les droites (AJ), (BK) et (JK).

Montrer que le triangle OKJ est rectangle.

GEOPLAN permet une résolution numérique de cet exercice, la valeur de l'angle étant égale à 90° quelle que soit la position de I sur le demi-cercle.



CABRI propose de vérifier l'orthogonalité des deux droites, et donne ainsi le résultat attendu.

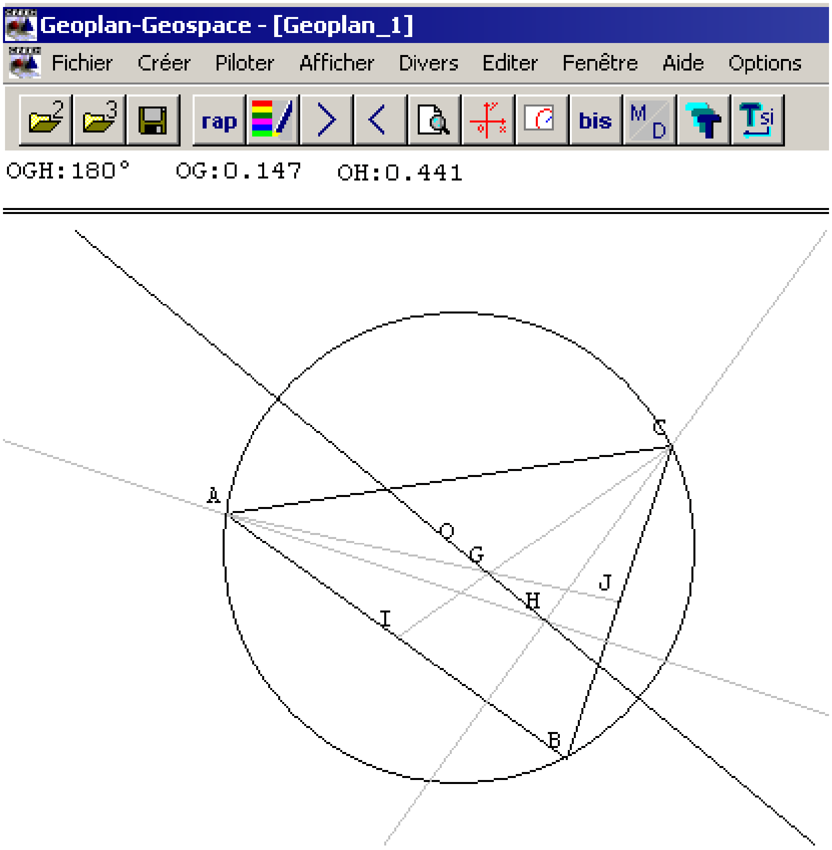


Euler (Fractale)

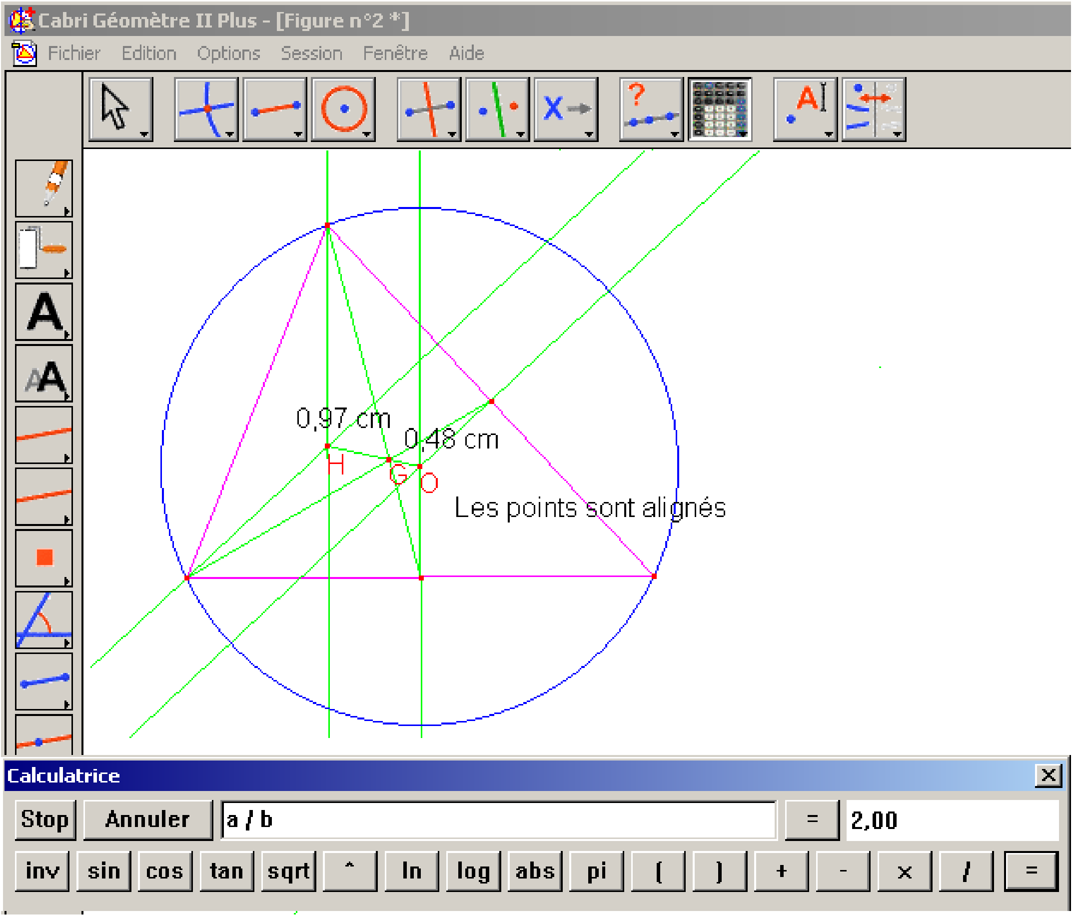
ABC est un triangle non équilatéral, on appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], A1, B1 et C1 les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G est son centre de gravité et H son orthocentre. La droite (OG) coupe la droite (AA1) en K et la droite (BB1) en K'.

Montrer que les points O, G et H sont alignés et que GH = 2 GO

Avec GEOPLAN, l'alignement est montré par l'affichage de l'angle, dont la mesure reste constante lorsqu'on déplace les points. Les rapports de longueurs peuvent être calculés à partir des longueurs affichées, mais celles-ci ne sont pas exactes.



Avec CABRI, l'alignement est donné par le logiciel, et reste vrai lorsqu'on déplace les points. Pour le rapport des longueurs, on doit vérifier numériquement, le résultat est alors exact.

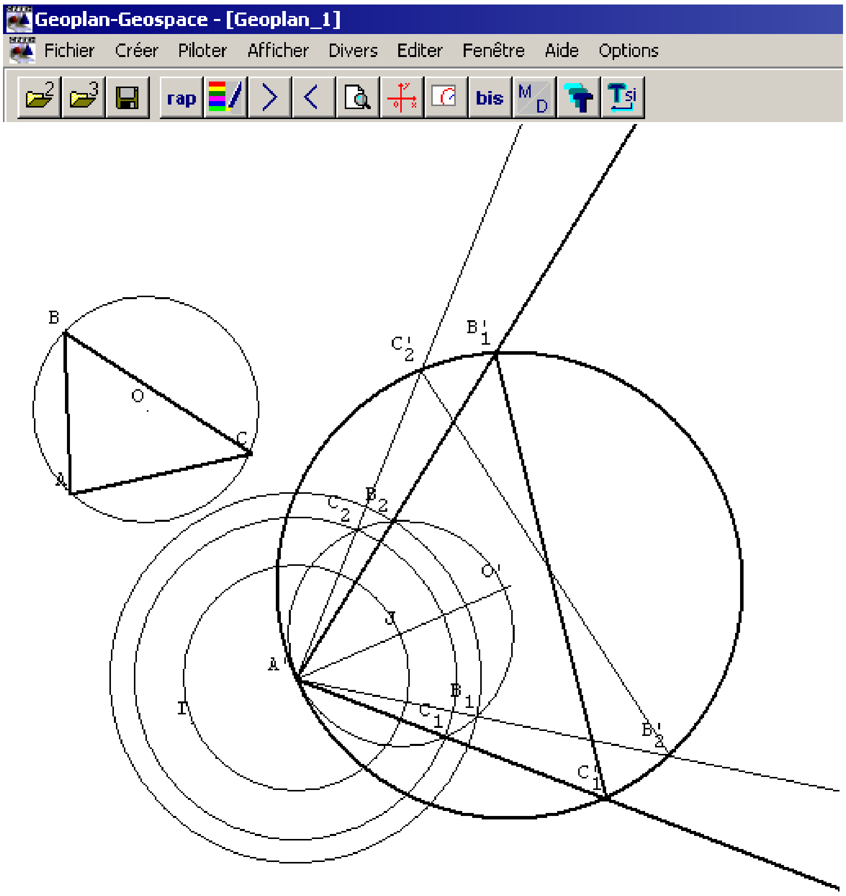


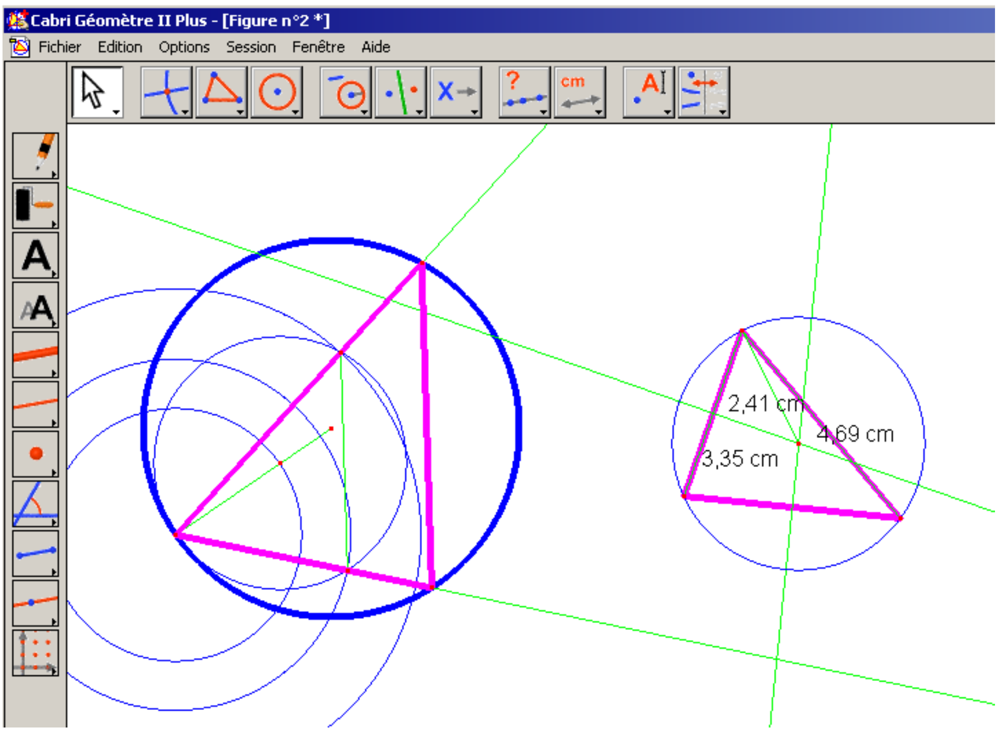
Dans les deux cas, le tracé de la figure n'est pas trivial.

Problème de construction (Delagrave)

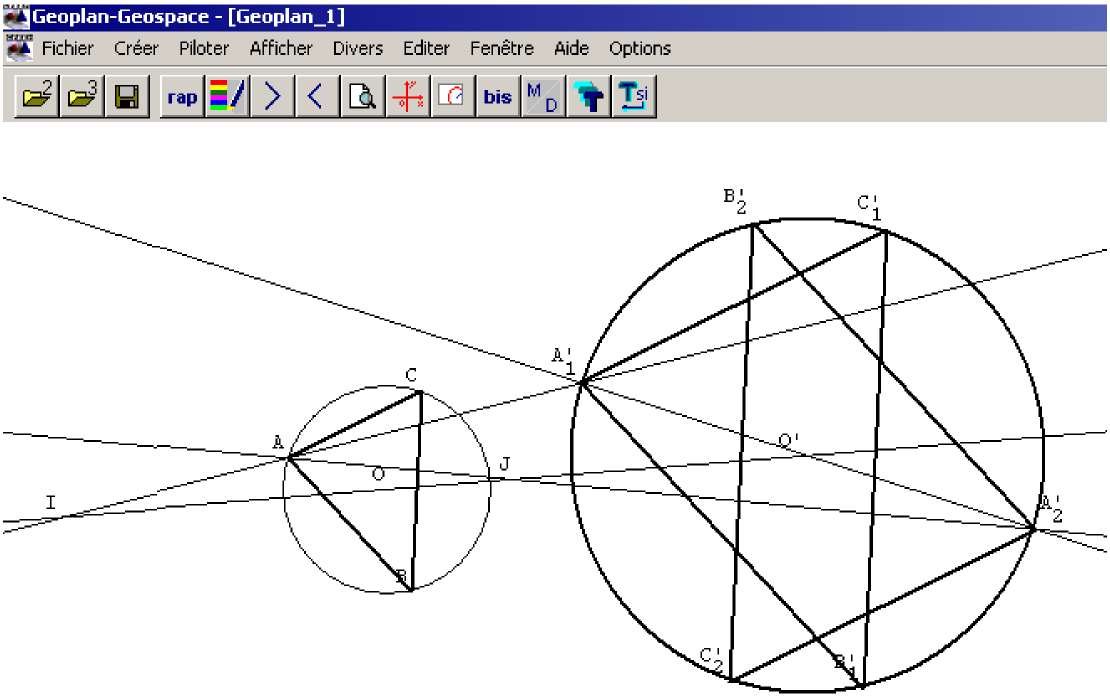
ABC est un triangle donné et (C) un cercle donné. Construire un triangle MNP semblable au triangle ABC inscrit dans (C)

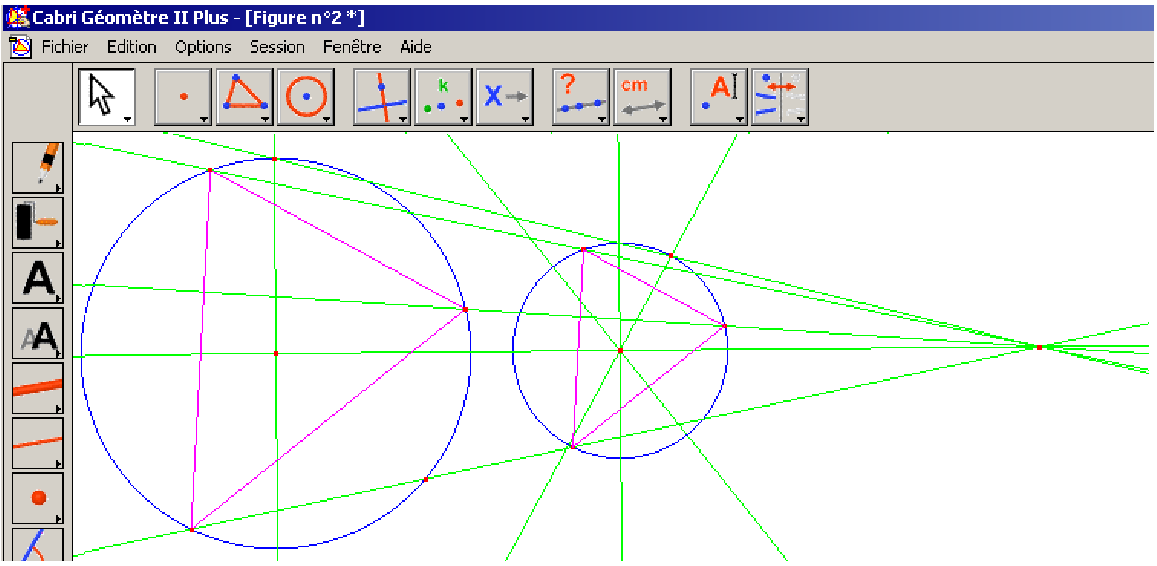
Avec les deux logiciels, la résolution revient à un travail fastidieux de report de longueurs, qui n'a plus grand chose à voir avec les triangles semblables. Le fait de pouvoir superposer les figures (cercle donné et cercle circonscrit à ABC) peut peut-être donner l'idée de la démarche à suivre.





En revanche, si on s'autorise l'utilisation des homothéties, cet exercice devient beaucoup plus simple, avec GEOPLAN et CABRI. Les déplacements des points de la figure de départ permettent de repérer les sommets qui se correspondent (car ceux-là se déplacent en même temps).





La résolution de ces exercices – qui représentent un petit échantillon de ce qu'on trouve dans ce chapitre – à l'aide de logiciels de géométrie dynamique nous permet de dégager quelques remarques sur ce que permet de faire le logiciel, selon le type de problème considéré :

- lorsqu'il s'agit de l'application du classique D'1 + P1 (démonstration de la similitude à l'aide des angles, puis calcul de longueurs ou de rapports de longueurs) les logiciels permettent de repérer facilement les sommets homologues à l'aide des mesures des angles, mais seul CABRI permet de calculer les égalités ou rapports de longueurs lorsqu'ils existent.

- idem lorsqu'il s'agit du travail de P'1 (démonstration de la similitude à l'aide des longueurs) ou de P2 (rapport des aires)

- les problèmes d'orthogonalité et d'alignement sont pris en charge par CABRI, et GEOPLAN permet seulement une vérification numérique de ces résultats. Dans tous les cas, la résolution n'a que très peu à voir avec les triangles semblables, c'est plutôt la réalisation de la figure, en tenant compte des contraintes et possibilités du logiciel, qui est en jeu.

- en revanche, pour les problèmes qui peuvent aussi être résolus à l'aide des transformations – en particulier les problèmes de construction, le logiciel semble être un outil intéressant : le déplacement des points – y compris du centre de l'homothétie – permet peut-être de visualiser et d'associer les homologues. Ce cas ne concerne pas vraiment les élèves de 2nde, puisqu'ils ne disposent pas de ces transformations.

Dans tous les cas, le travail avec un logiciel de géométrie dynamique ne semble pas adapté aux applications des triangles semblables : les propriétés numériques des figures, données par les logiciels, rendent la plupart des problèmes triviaux : on peut résoudre sans les cas de similitude. La donnée des angles permet peut-être cependant la reconnaissance des sommets homologues, de même que le mouvement qu'autorise ce type d'outil de travail, qui facilite peut-être le repérage en faisant bouger ensembles les points qui sont associés.

9) Conclusion

Ces analyses de manuels nous ont permis d'approfondir notre recherche afin de déterminer d'une part ce qui est proposé aux élèves sur le chapitre des triangles semblables, mais aussi pour comprendre comment le travail de cette notion peut s'inscrire dans – et compléter – les connaissances mathématiques des élèves.

Les manuels que nous avons étudiés sont relativement différents, par le nombre d'exercices proposés, les stratégies et approches adoptées dans le cours, la variété des applications, leur difficulté et les types de problèmes que la notion permet de résoudre.

- Nous pouvons noter tout de même quelques similarités entre à peu près tous les ouvrages.

La définition choisie pour les triangles semblables est la même pour presque tous les manuels (celle qui est imposée par le programme) et le traitement des homologues est rarement explicité, et jamais justifié (rien n'est d'ailleurs écrit à ce sujet dans les accompagnements du programme). Il semblerait donc que, tout comme les professeurs observés, les auteurs de manuels soient démunis face à ce problème de repérage, qui n'est pas trivial, on l'a vu, mais qui est surtout difficile à clarifier sans recours aux transformations.

Certaines applications sont beaucoup plus proposées que d'autres, et nous retrouvons aussi ici, plus ou moins nettement selon les manuels, une tendance à privilégier le travail de D'1 et D'1+P1, et à négliger un peu le travail spécifique sur les longueurs. Or il est possible, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que ce travail apporte une autre façon d'envisager le repérage des homologues.

Peu d'exercices très complexes sont proposés. Les types de problèmes proposés dans ce chapitre ont surtout trait à des calculs de longueurs ou d'aires, plus rarement à des études de configurations ou des constructions. Dans tous les cas, les triangles semblables ne constituent pas la seule méthode pour résoudre, même si parfois c'est la seule qui soit disponible au niveau de la classe de 2^{nde}.

- Qu'est-ce qu'un enseignant peut trouver dans les manuels ?

Les enseignants utilisent fréquemment les manuels pour y puiser des exercices à donner aux élèves.

Mme P. utilise d'ailleurs Transmath, et Mme F. Pythagore., Mme B n'utilise pas de manuel. Nous pouvons regarder si les stratégies des manuels choisis par Mmes P. et F. correspondent aux choix qu'elles ont elle-même faits dans leur cours.

Voilà un tableau récapitulant les résultats trouvés sur les deux manuels en question :

manuel	transmath	pythagore
Introduction Isométriques / semblables	Révisions Pas d'activité sur triangles semblables	activités sur transformations
Définition de similitude	égalité des angles	égalité des angles
Démo du cours	P1	P1, P'1 et P3 en exercices guidés
Homologues dans le cours	écriture	Ecriture
Homologues dans les exercices		4 ex de repérage au début 17 ex dans l'ordre, puis mélangés
Nb d'ex	26	33
Configuration dominante	triangles	triangles
ancien	Grande proportion d'ex sans travail de l'ancien, Travail de l'algèbre	Pas d'algèbre
nouveau	Travail des longueurs	Pas de travail des longueurs
NMF prédominant	Assez varié	"Reconnaissance" Pas de "choix"

En ce qui concerne l'introduction de la notion, celle qui est proposée par Transmath est différente de celle adoptée par Mme P., en revanche, ce manuel fait partie de ceux qui privilégient le travail sur les propriétés relatives aux longueurs et la variété des niveaux de mise en fonctionnement, tout comme Mme P. dans ce chapitre

Dans Pythagore, l'activité d'introduction ne correspond pas à celle choisie par Mme F., mais le niveau de mise en fonctionnement dominant, et l'absence de travail des longueurs se retrouvent dans son cours sur les triangles semblables.

Il semblerait ici que les exercices des manuels choisis par les deux professeurs ressemblent effectivement à ceux trouvés dans leur classe, mais pas la partie cours, qui est très différentes de ce qu'elles ont choisi de présenter à leurs élèves.

Les manuels véhiculent un certain contrat didactique – comme cela a pu être constaté dans d'autres recherches. Beaucoup de choses y sont représentées – par rapport à ce qu'on peut trouver dans un cours en classe – , mais les professeurs qui les utilisent n'ont pas la même pondération.

- Quel outil représentent les logiciels de géométrie dynamique pour l'apprentissage des cas de similitude ?

Nous avons voulu explorer la possibilité de résoudre les exercices mettant en jeu des triangles semblables, à l'aide de CABRI et de GEOPLAN, afin de voir comment la notion pouvait vivre au sein de ces environnements – et éventuellement disparaître derrière ces outils plus "performants" – mais aussi pour essayer de déterminer si le repérage des homologues était rendu plus facile par ce biais.

Nous avons pu constater que les méthodes de résolution avec des logiciels de géométrie dynamique évacuaient totalement la notion de triangles semblables, car elles permettent de résoudre les exercices du chapitre sans évoquer les cas de similitude.

Finalement, qu'on utilise ces logiciels ou bien les propriétés géométriques à l'origine des cas de similitude, les triangles semblables n'interviennent pas naturellement.

Mais il y a une autre dimension des logiciels de géométrie qui nous intéresse, c'est la dimension "dynamique". Comme nous l'avons déjà dit, la notion de triangles semblables est née de l'intuition et du mouvement, et il est possible que ce mouvement permette aux élèves de mieux appréhender en particulier la notion d'homologues. Sans les transformations adéquates, ce mouvement est moins facile à mettre en œuvre, d'où l'intérêt éventuel de ces logiciels.

VIII) Conclusion, limites et perspectives

Nous allons maintenant synthétiser les résultats de notre recherche, en particulier en ce qui concerne les apprentissages des élèves sur la notion de triangles semblables – les difficultés rencontrées et la façon dont elles peuvent être éventuellement reliées à l'enseignement dispensé. Nous reprendrons aussi nos résultats sur les pratiques enseignantes, leur diversité, ici, mais aussi leur grande stabilité.

Nous donnerons ensuite les limites de nos analyses : ce qui ne nous permet pas de conclure, ou nous oblige à rester prudents. Ces limites sont dues en grande partie au côté restreint de nos observations et aux contraintes de temps de la thèse.

Nous conclurons sur les perspectives de notre travail : les pistes et ouvertures possibles pour la suite.

1) Les rapports entre enseignements et apprentissage 334

- *a) Difficultés et erreurs générales des élèves........ 334*
- *b) Influence du type de travail en classe........ 335*
- *c) Les effets différentiateurs........ 336*
- *d) Le rôle du temps........ 337*

2) Le problème des homologues 337

- *a) L'apport de l'analyse épistémologique et mathématique........ 337*
- *b) Les erreurs des élèves sur les homologues........ 339*
- *c) Le traitement des homologues dans les manuels........ 339*
- *d) Les pratiques des enseignants sur cette notion........ 340*

3) La variété des pratiques sur les triangles semblables........ 341

- *a) Des points communs : les contraintes qui pèsent sur l'enseignement........ 341*
- *b) Des différences de stratégies : une stabilité et une cohérence des pratiques de chaque enseignant........ 342*

4) Les limites de la recherche........ 343

5) Avancées et perspectives 344

1) Les rapports entre enseignements et apprentissage

En comparant les exercices de contrôle avec ceux qui avaient été donnés auparavant en classe, nous avons voulu mettre en évidence des influences potentielles des enseignements – en particulier du choix des tâches proposées et de la gestion des activités qui peuvent en découler en classe – sur les apprentissages des élèves.

a) Difficultés et erreurs générales des élèves

Les élèves rencontrent des difficultés lorsqu'ils sont face au contrôle, ce qui nous amène à discuter leur apprentissage sur la notion visée. Nous réunissons et synthétisons ici les points essentiels qui ont été trouvés au fur et à mesure du travail que nous avons fait.

Tout d'abord, nous repérons beaucoup d'**erreurs sur l'application de certaines propriétés, et en particulier celles qui concernent les longueurs** (P'1, P1 et P3) et les aires (P2). Nous avons vu justement que ces propriétés étaient moins travaillées en classe, ou parfois seulement à la maison ou dans un exercice d'une séance de module. Nous reviendrons sur ces conclusions en rapprochant ces erreurs et le type de travail de la notion.

Les propriétés plus anciennes posent aussi problème aux élèves, et en particulier l'**algèbre** – exercice 1.2) chez Mme B., ex 1.2) chez Mme P. et exercice 2.2) chez Mme F., qui sont les moins bien réussis des contrôles – certainement parce que sa présence dans un exercice oblige à un changement de cadre. Selon que ces propriétés anciennes ont été révisées ou non au cours du chapitre, et suivant leur position dans l'exercice par rapport aux notions nouvelles, la réussite des élèves au contrôle est plus ou moins grande.

Les propriétés plus récentes sur les **triangles isométriques** peuvent aussi poser problème lorsqu'elles sont mélangées à celles des triangles semblables, si l'on en juge par les réponses des élèves au dernier exercice du contrôle de Mme B., qui avait pourtant introduit les triangles semblables comme une extension des triangles isométriques. Pourrait-on y voir une conséquence de l'introduction de la notion par le professeur ?

Les erreurs des élèves ont aussi un rapport certain avec le niveau de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles requis au contrôle. Cela peut paraître trivial : ils réussissent généralement moins bien lorsque c'est plus difficile. Mais cela nous permet aussi de voir que même lorsque ces difficultés sont travaillées en classe, il se peut qu'elles ne soient pas surmontables au contrôle pour une partie des élèves. Par exemple, la première question des exercices 3 et 4 du contrôle de Mme B. a été moins bien réussies que les autres, il s'agit pourtant d'une application de D'1 qui a été largement travaillée en classe, et aussi une fois en module avec un degré de difficulté analogue du niveau de mise en fonctionnement.

Là encore, il nous faudra rapprocher les résultats des élèves au type de travail effectué, pour tenter de comprendre l'influence de ce qui a été proposé – ou non – en classe sur la réussite au contrôle.

Un dernier type d'erreur des élèves a trait au repérage des homologues dans les configurations où ce repérage n'est pas évident à réaliser. Dans chaque contrôle en effet, dans une plus ou moins grande mesure, les exercices les moins bien réussis sont ceux qui nécessitaient cette reconnaissance particulière des modalités d'application des cas de similitude. Nous reviendrons plus spécifiquement sur cette difficulté et sur son rapport avec ce qui est proposé – en classe mais aussi dans les manuels et les programmes scolaires – dans la deuxième partie de nos conclusions.

b) Influence du type de travail en classe

Dans chacune des classes, nous pouvons vérifier que **les exercices de contrôle les mieux réussis par les élèves sont ceux qui sont comparables à des exercices traités en classe**, **et plus particulièrement aux applications qui ont été proposées le plus souvent**. D'ailleurs, à l'opposé, et cela confirme ce premier résultat, les exercices les moins bien réussis correspondent souvent à des propriétés qui ont été peu travaillées (en particulier P'1, P2 et P3 pour lesquelles tous les professeurs ont proposé nettement moins d'applications, voire pas d'application du tout).

D'autres variables rentrent en jeu, en plus de la fréquence des adaptations proposées : la configuration géométrique et les connaissances anciennes associées, si elles sont semblables en classe et en contrôle, favorisent la réussite des élèves à des questions similaires.

En revanche, lorsque le niveau de mise en fonctionnement des propriétés en contrôle est plus élevé – selon nous – que celui pratiqué en classe sur la même propriété[80], il semble que les élèves ne surmontent pas la difficulté accrue, ou en tout cas pas tous les élèves. Il semblerait donc

[80] Et plus généralement dans les exercices du chapitre

qu'**un travail répétitif d'adaptation d'une propriété ne garantisse pas une réussite au contrôle à une tâche similaire, mais un peu plus difficile.**

Nous nous sommes demandé quelle était l'influence d'un travail autonome des élèves – en module avec du temps de recherche ou à la maison – sur leur réussite au contrôle.

Dans toutes les classes observées, il y avait des propriétés ou des niveaux de mise en fonctionnement qui n'avaient été travaillés qu'à la maison, ou encore dans des exercices de module. Pour des tâches similaires en contrôle, les résultats des élèves ne sont pas très bons, et montrent une certaine disparité, que nous avons choisi d'interpréter en termes de "bons" et "mauvais" élèves.

c) Les effets différentiateurs

Il y a en effet une catégorie d'élèves qui butent sur les mêmes difficultés, en particulier lorsque celles-ci n'ont été préparées qu'à travers des exercices en demi-classe ou à la maison, donc avec une plus grande autonomie (surtout chez Mme B. où le contraste entre les deux types de séances est le plus marqué). Pour les autres au contraire – les "bons" – un tel type de travail semble profitable.

La gestion des activités des élèves en classe, et le choix des tâches proposées pour les devoirs à la maison, semblent donc être des facteurs de différentiation entre les élèves.

Cependant, même si les informations complémentaires fournies par les professeurs confortent en général notre classement, nous ne pouvons pas savoir si l'autonomie profite aux bons élèves, ou si c'est le fait d'en profiter qui en fait de bons élèves. Autrement dit : sont-ils meilleurs parce qu'ils savent en tirer partie, ou bien est-ce le fait d'en tirer partie qui les rend meilleurs ? Malgré tout, il s'agit bien d'un facteur de différentiation, et cette constatation conforte d'autres résultats obtenus, en particulier sur le travail à la maison (Castela, 2005).

Ce type de travail est associé à la réussite de certains élèves, il peut donc être bénéfique pour les apprentissages sur cette notion. Reste à savoir comment prendre en charge la difficulté des élèves à s'approprier l'autonomie qui leur est parfois laissée. Quelle gestion du travail en classe envisager pour inclure aussi des élèves moins bons, avec succès, dans cette démarche ?

d) Le rôle du temps

Le temps joue certainement lui aussi un rôle dans les apprentissages des élèves sur cette notion.

Lorsque **beaucoup de temps** est **passé sur le travail d'une propriété**, on l'a vu, il semble que cela **favorise les apprentissages**, ou en tout cas la réussite au contrôle sur ces propriétés. Cependant, pour des contraintes d'horaires, il n'est pas possible de passer beaucoup de temps sur chacune des propriétés (c'est le cas ici pour P'1, P2 et P3 qui ont été nettement négligées dans presque toutes les classes par rapport à D'1 et P1). De plus, un travail à la maison, même s'il permet d'"économiser" le temps passé sur une notion en classe, ne permet pas forcément, on l'a dit, un apprentissage pour tous.

D'autre part ici, le temps qui passe semble aussi jouer un rôle défavorable, si on en juge par les apprentissages à long terme des élèves (contrôles relativement ratés : après de longues interruptions chez M. P., et deux semaines après la fin du chapitre chez Mme P.) Chez Mme P. particulièrement, le premier contrôle, plutôt réussi, nous incitait à croire que les élèves avaient appris des choses sur la notion de triangles semblables. Ils chutent pourtant au contrôle suivant, deux semaines plus tard, sur une propriété déjà testée au premier contrôle.

Ces résultats soulignent la difficulté de concilier à la fois les contraintes de temps et une gestion du travail qui soit profitable – durablement – au plus grand nombre.

2) Le problème des homologues

Parmi les difficultés des élèves que nous avons mises à jour – la difficulté du mélange ancien / nouveau, l'impossibilité pour certains de surmonter une augmentation du niveau de mise en fonctionnement – nous en avons "repéré" une qui est spécifique à ce chapitre : le repérage des homologues.

a) L'apport de l'analyse épistémologique et mathématique

Grâce à l'analyse épistémologique de la notion de triangles semblables, nous avons pu **comprendre ce qui "manquait" aux élèves** en classe, question qui constituait notre objectif de départ. Cette étude s'est avérée très riche pour nous, et il semble que ce ne soit pas uniquement propre au cas des triangles semblables (Dorier, 1997):

> *" L'histoire des mathématiques est une donnée fondamentale de la recherche en didactique, elle est une des sources essentielles pour analyser la transposition didactique sensu lato. Elle permet de donner au savoir mathématique sa dimension dynamique, et contribue à dégager à travers les étapes de sa constitution ce qui en a fait un savoir de référence digne d'être enseigné ; elle en détermine le sens de manière beaucoup plus riche que la seule référence au contexte actuel ne le permettrait. Par ailleurs, l'étude historique, si elle se prolonge jusqu'au moment où le savoir a été enseigné et retrace également l'histoire de cet enseignement, est un outil fondamental pour l'étude de la transposition didactique stricto sensu."*

Nous avons regardé à la fois l'évolution mathématique de la notion de triangles semblables dans les travaux de recherche des scientifiques, mais aussi dans les programmes scolaires. Cela nous a permis de constater que la notion de triangles de même forme et la notion de similitude – en tant que transformation – étaient liées.

Les transformations ne sont pas indispensables pour appréhender la similitude des triangles : les cas de similitudes sont établis sans qu'il soit nécessaire d'exhiber la transformation qui permet le passage d'une figure à l'autre. Cependant, l'idée de transformation est là dès la naissance de la notion.

Au départ en effet, à défaut de disposer des transformations, c'est le mouvement qu'utilisent Euclide et son école pour comparer les triangles ; et ce n'est qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que les similitudes apparaissent dans les travaux scientifiques.

Parallèlement, dans les programmes scolaires du XX$^{\text{ème}}$ siècle, les transformations et les cas de similitude sont présents jusqu'en 1970, l'un découlant de l'autre, et tantôt le contraire.

En 2000 cependant, les cas de similitude sont de retour dans les programmes, mais les similitudes n'y sont plus. C'est ce manque qui nous a intéressé, et qui nous a permis de repérer dans les savoirs enseignés une difficulté éventuelle pour les élèves, "privés" des similitudes.

Nous nous sommes demandé en particulier comment le repérage des sommets homologues – algorithmisé lorsqu'on dispose des transformations – pouvait se faire sans elles.

Nous avons évoqué la possibilité de repérer d'abord les côtés homologues, mais le passage des côtés aux sommets (et inversement) n'est pas évident, et l'est d'autant moins sans les transformations. Leur absence prive les élèves à la fois d'une méthode, mais aussi d'une justification théorique pour cette méthode, et peut-être même aussi d'un sens à ce repérage : il faut le faire, mais on ne sait pas pourquoi, et – plus important – on ne sait pas comment.

Les erreurs des élèves aux contrôles que nous avons analysés semblent nous conforter dans l'idée qu'il y a réellement là un problème pour eux, problème qui n'est pas forcément pris en charge par les professeurs.

b) Les erreurs des élèves sur les homologues

Dans chacun des contrôles, il était demandé au moins une fois une application numérique ou littérale de la proportionnalité des côtés des triangles semblables. **Ces questions, nécessitant le repérage des homologues, ont été les moins bien réussies par les élèves**, en particulier dans certains cas, où les triangles sont emboîtés.

Lorsque le repérage des homologues pouvait se faire en trichant (cf. Mme B.), c'est-à-dire en sélectionnant les sommets associés à partir des expressions demandées, les élèves ont pu réussir un peu mieux ces questions, en particulier souvent mieux que la première question de l'exercice (démontrer la similitude), qui est plus souvent fausse ou non traitée.

Mais dans certains cas, cette ruse n'est pas possible, par exemple parce que l'expression demandée est trop complexe (produit de 3 longueurs au lieu de 2 chez Mme P., Mme S. et M. P.) ou encore parce que c'est une application numérique qui est demandée (calculer une longueur chez M.P.). Dans ces cas-là, les résultats des élèves au contrôle sont nettement plus mauvais.

Il faut évidemment nuancer cette interprétation en comparant ce qui a été fait en classe à ce qui est demandé au contrôle.

c) Le traitement des homologues dans les manuels

Il n'est pas inutile de rappeler ici que **rien n'est mentionné dans les programmes et accompagnements sur le repérage des homologues, pas plus qu'ils ne sont pris en compte dans les cours des principaux manuels scolaires de 2$^{\text{nde}}$**. Rares y sont les exercices qui visent spécifiquement le travail de cette difficulté, même si on en trouve parfois quelques-uns.

Les énoncés des manuels donnent indifféremment les sommets des triangles dans l'ordre ou le désordre, même s'ils sont plus souvent ordonnés lorsque les exercices se compliquent par ailleurs. Les exercices où les triangles semblables sont un outil pour démontrer des propriétés – généralement sur les longueurs et les aires – sont assez rares, et l'apport des logiciels de géométrie dynamique pour les résoudre n'est pas négligeable. Nous ne retrouvons peut-être pas par hasard ici l'idée initiale de mouvement, qui pourrait éventuellement présenter un substitut valable pour remplacer transformations manquantes, et redonner une dimension intuitive à ce repérage, abstrait pour les élèves.

d) Les pratiques des enseignants sur cette notion

Il n'est pas étonnant que nous n'ayons trouvé **aucun discours théorique – et parfois même aucun discours technique – sur ce type de tâche**, dans les classes observées. Les professeurs recommandent d'écrire les homologues "les uns en dessous des autres", dans le bon ordre, mais ne précisent pas comment déterminer cet ordre. Mais d'après les résultats des élèves de Mme B., il semble que l'écriture n'ait pas de sens pour beaucoup d'élèves, ou en tout cas qu'elle ne permette pas de simplifier le repérage.

Certains professeurs écrivent souvent (systématiquement chez Mme S.) les énoncés des exercices proposés en classe avec les noms des triangles bien ordonnés, pour évacuer la difficulté, surtout si l'exercice est par ailleurs complexe (contrat). Nous pouvons voir que pour les élèves de Mme S., c'est un handicap : l'un des exercices du contrôle – dont l'énoncé, nous le rappelons, n'a pas été rédigé par le professeur – a des sommets dans le désordre : c'est d'ailleurs l'exercice le moins bien réussi par les élèves (hors contrat).

Dans leur gestion des activités des élèves, les professeurs ne prennent pas tous en charge de la même façon le repérage des homologues : Mme F. laisse faire les élèves, tandis que Mme B. indique assez rapidement le repérage. Les résultats des élèves de Mme F. sur ce type de tâche sont meilleurs que ceux de Mme B., mais nous avons vu que d'autres paramètres entraient en jeu (le bon niveau des élèves de Mme F. et la relative facilité de son contrôle) et ne nous permettaient pas d'interpréter ces résultats.

Nous nous sommes demandé aussi si la façon d'introduire la notion nouvelle à la classe pouvait avoir une influence sur les apprentissages des élèves à ce sujet. Nos résultats ne nous permettent pas de conclure positivement, car seuls les élèves de Mme F. butent moins sur cette difficulté. Nous pensons tout de même que le lien entre les angles égaux et les côtés proportionnels, fait plus ou moins tôt dans le chapitre, peut jouer un rôle sur les capacités des élèves à repérer et associer les sommets, en ce qu'il est porteur d'un algorithme possible pour les élèves.

Dans toutes ces classes et ce malgré des stratégies différentes, le repérage des homologues reste un problème pour un nombre plus ou moins important d'élèves, et nous n'avons pas vu de prise en charge de cette difficulté par les professeurs.

Peut-être qu'il est finalement difficile de faire vivre les cas de similitude sans les transformations, et que leur présence simultanée dans les programmes scolaires jusqu'à la réforme des maths modernes est caractéristique d'un lien très fort, qui a été brisé dans les nouveaux programmes.

3) La variété des pratiques sur les triangles semblables

Les pratiques observées dans les 5 classes sont assez différentes, au point parfois de limiter nos possibilités d'analyses. Cependant, grâce à la richesse des données recueillies et du traitement adopté, nous avons pu dégager des constantes fortes, mais aussi une diversité des pratiques, qui respectent une certaine cohérence pour chaque professeur.

a) Des points communs : les contraintes qui pèsent sur l'enseignement

Le point commun le plus fort aux trois premières analyses, c'est la prise en compte de la contrainte institutionnelle et du champ mathématique investi.

En effet, les trois professeurs ont passé à peu près le même nombre de séances, et donné un nombre d'applications comparable dans chaque classe. Malgré la liberté de choix dans leur stratégie d'enseignement – liberté qu'ils ont exercée ici sur ce chapitre, avec des stratégies très différentes – les contraintes du programme et des horaires sont très fortes.

Ils ont aussi introduit les mêmes propriétés, dans le même ordre, même si une fois encore ils l'ont fait chacun à leur manière propre.

b) Des différences de stratégies : une stabilité et une cohérence des pratiques de chaque enseignant

Nous avons mis en évidence des stratégies assez marquées pour chacun des trois premiers enseignants observés – qui correspondent aussi aux stratégies des deux enseignants observés par la suite, dans le cadre du mémoire DEA. **Ces stratégies sont cohérentes** : les différents éléments que nous avons pris en compte pour les définir ne sont jamais contradictoires pour un même professeur, et pourraient refléter la conception qu'ils semblent avoir de l'enseignement (prise en compte de la composante personnelle).

Pour Mme P. et Mme S., il s'agit avant tout de donner du sens à la notion, à travers son introduction dans le cours, et les types de tâches variés proposées aux élèves avec une recherche individuelle. Ces deux contrôle sont certainement aussi ceux qui correspondent le plus à ce qui a été fait en classe, même si les résultats des élèves sont nettement meilleurs chez Mme P.

Pour Mme B., la quête de sens est privilégiée au début pour les choses simples, mais elle est abandonnée au profit d'une prise en charge plus magistrale en classe, lorsque le cours se complique. Les modules restent un moment dédié à la recherche, mais le peu de gestion collective explique peut-être que cela ne profite pas de la même façon à tous les élèves.

Pour Mme F. et M.P enfin, il s'agit essentiellement d'un cours magistral, du début jusqu'à la fin du chapitre, avec peu d'autonomie pour les élèves, malgré des tâches proposées plutôt complexes.

Grâce à notre analyse assez fine de la gestion des activités des élèves par le professeur – couplée à l'analyse a priori des tâches proposées – nous avons mis en évidence une **stabilité de la stratégie d'enseignement, pour un même professeur, tout au long du chapitre.**

Ces stratégies sont à mettre en rapport aussi avec la classe dans laquelle se déroule l'enseignement : ce qui est possible pour Mme F. avec ses élèves de très bon niveau ne le serait pas forcément dans la classe de Mme B. : en termes de complexité des tâches proposées et de gestion du déroulement. Nous sommes donc limités aussi par ces composantes, qui n'autorisent pas toutes les comparaisons entre les professeurs.

4) Les limites de la recherche

Les limites de nos observations sont dues aux contraintes du chercheur : un temps assez limité pour réaliser des observations, et, comme nous nous en sommes "plaint" au début de ce texte, de la difficulté de trouver des terrains d'observation..

Nous avons déjà réduit certaines de ces contraintes en choisissant de ne pas transcrire les vidéos réalisées, ce qui nous a permis de gagner du temps et donc d'envisager sereinement l'analyse d'un plus grand nombre de données. Mais cela ne nous a pas permis en revanche de prendre en compte les indicateurs langagiers ou la structure des interactions. Nous aurions pu nous intéresser au non verbal et au proxémique, mais nous n'avons pas d'outil, et pas le temps nécessaire, pour les inclure dans nos analyses.

Pour toutes ces raisons, nous n'avons observé qu'un seul professeur, une seule année, dans une seule classe et sur un seul chapitre. Cela limite en particulier notre capacité à généraliser les conclusions obtenues. Par essence, ce travail est partiel ; il nous faut en tirer le maximum malgré tout, en particulier en nous appuyant sur des hypothèses de cohérence et de stabilité des pratiques, déjà confirmées par d'autres recherches

D'autres limites viennent aussi de ce que nous sommes capables ou non d'observer.

Par exemple, et nous l'avons annoncé dès le début, nous savons peu de choses sur le travail effectif des élèves, et encore moins de chaque élève. Nous ne nous intéressons d'ailleurs pas à ce qu'il pourrait y avoir d'opaque dans le discours du professeur, et considérons que l'élève entend tout ce qui est dit en classe, même si nous savons que ce n'est – vraisemblablement – pas le cas.

D'autre part, nous n'avons pas pu prendre en compte ce qui se passe en dehors de la classe : et en particulier quel type d'aide les élèves reçoivent à la maison, y compris sous forme de cours particuliers. La comparaison contrôle / classe devrait alors être enrichie pour les élèves dont le travail à la maison est profitable. Nous n'avons pas pu obtenir ces informations, dans la plupart des cas.

Enfin, nous ne pouvons pas non plus évaluer les apprentissages éventuels sur cette notion : une réussite au contrôle, on l'a dit, n'est pas forcément le signe d'un apprentissage à long terme, et peut-être même pas à plus court terme.

Nous ne nous intéressons pas non plus au psychisme des différents acteurs, c'est-à-dire que nous ne cherchons pas à analyser les individus "élèves", lors des séances ou plus largement, pour prendre en compte leurs particularités au sein de la classe dans notre recherche. Nous ne pouvons pas réaliser une étude à si grande échelle, et ne saurions pas forcément en tirer parti. Nous restons donc prudents dans nos conclusions, en raison de cette dimension restée dans l'ombre, en particulier en ce qui concerne le rapport entre réussite au contrôle et apprentissage – comme nous l'avons signalé au moment opportun dans nos analyses.

Pour toutes ces raisons, et par le fait que les classes observées étaient de niveau très différent, il nous est difficile de tirer des conclusions définitives sur les rapports entre ce qu'ont fait – ou pourraient avoir fait – les élèves en classe, et ce qu'ils ont appris – ou du moins réussi – au moment du contrôle.

5) Avancées et perspectives

Malgré les limites que nous venons d'évoquer, la recherche que nous avons menée nous a permis d'obtenir des résultats importants et de poser de nouvelles questions.

- **Cette étude s'inscrit – et pourra être lue – pour alimenter les recherches actuelles sur les effets des pratiques enseignantes et aussi sur leur variabilité, et à terme sur les formations**

Elle représente une avancée par rapport à d'autres recherches sur les apprentissages des élèves, en ce qu'elle donne accès à la réalité des classes ordinaires, et surtout par le fait **qu'elle permet une mise en relation entre ces réalités et les activités et performances des élèves**

Les résultats tirés de nos observations soulignent en effet qu'**il y a bien une relation entre ce qui est fait en classe et les apprentissages, dans toutes les classes que nous avons observées,** et cela malgré les limites que nous avons soulignées plus haut

Par ailleurs les résultats obtenus mettent aussi en lumière la régularité et la diversité du côté des activités des enseignants, et renouvellent le questionnement sur les effets des enseignements sur les apprentissages.

Cette recherche donnera certainement lieu à des prolongements, en particulier pour faire reculer les limites dont nous avons été ici prisonniers : nous voulons renouveler nos observations, mais en essayant cette fois-ci de choisir des classes comparables, et d'intervenir sur l'élaboration de l'évaluation finales des élèves, afin de tester ce qui a été fait en classe de manière plus pertinente.[81]

Il nous faudrait aussi prendre en compte de nouvelles variables, nées de notre recherche. En particulier, **le problème des homologues a soulevé des questions sur l'utilité des logiciels de géométrie dynamique pour les apprentissages des élèves** sur certaines propriétés, en particulier celles qui touchent au mouvement et à l'intuition. Nous ne nous sommes pas penchés plus avant sur cette question, faute de temps, mais il serait intéressant pour nous d'envisager l'observation de séances en classe dans lesquelles le professeur utilise l'un de ces logiciels, et de voir si ce type de travail peut permettre aux élèves de surmonter certaines des difficultés que nous avons mises à jour.

Pour synthétiser nos pistes de recherche futures, nous pouvons considérer les prolongements éventuels de deux résultats importants établis ici sur les liens entre ce qui est fait en classe et les apprentissages des élèves :

- **Les apprentissages des élèves reposent d'une part sur le choix des contenus enseignés.**

Nous avons vu qu'ici ces choix sont sensiblement les mêmes malgré des stratégies différentes. Ils sont étroitement liés aux contraintes du programme scolaire, et la marge de manœuvre des enseignants est un peu limitée par l'absence de certaines notions parmi les connaissances plus anciennes ou à enseigner, mais aussi éventuellement par le manque de richesse des manuels en ce qui concerne certaines applications.

Peut-être ce résultat est-il lié au chapitre étudié ?

[81] C'est d'ailleurs le travail entrepris par les deux étudiantes de DEA, qui nous a permis de compléter un peu nos données.

Nous suivrons évidemment de très près l'évolution future de la notion de triangles semblables dans les programmes et manuels de mathématiques.

Le lien "cas de similitude – transformations" pourrait-il être à nouveau rétabli par la suite ? Cela apporterait peut-être une réponse pour les élèves au problème du repérage des homologues. C'est une hypothèse qu'il serait intéressant pour nous de vérifier.

- **Les apprentissages des élèves dépendent aussi de la gestion des activités faite par le professeur.**

Nous avons vu qu'il n'était pas équivalent, pour certains élèves, de travailler une propriété à la maison, ou en classe, de manière plus ou moins dirigée. Ainsi nos résultats semblent indiquer que **le travail personnel des élèves prend une part non négligeable dans leurs apprentissages**, mais aussi que **ce travail personnel est conditionné en partie par ce qui est proposé en classe**.

Nous nous sommes demandé, sans savoir y répondre, si le travail personnel profite aux bons élèves, ou bien si ce sont les bons élèves qui en profitent. Ce questionnement est d'actualité, et mérite qu'on s'interroge sur la façon dont les élèves travaillent et apprennent à travailler, et sur les processus de différentiation qui sont à l'œuvre en classe.

Pour cela, nous espérons réussir à mettre en place les observations que nous avions prévues au départ : filmer quelques élèves en classe, puis en cours particulier, afin de repérer d'autres "manques" éventuels dans ce qui a été fait en classe – qui défavorisent peut-être les apprentissages visés pour certains élèves –, mais aussi pour mieux cerner le travail individuel de l'élève, la façon dont il se construit, et les influences qu'il peut avoir sur les apprentissages.

Enfin, malgré les professeurs particuliers qui nous ont fait faux bond – et qui ne nous ont pas laissé mettre en lumière le phénomène important et actuel de l'essor du soutien scolaire, nous n'avons pas dit notre dernier mot, et nous comptons bien essayer de répondre aux questions qui ont tout d'abord motivé cette recherche !

Analyse des pratiques, utilisation de la vidéo :

Blanchard-Laville C. (2003) Une séance de cours ordinaire. "Mélanie, tiens, passe au tableau" *L'Harmattan Paris*

Castela C. (2005) Genres de discours, genres d'activités, habitus et enjeux cachés d'apprentissage, *cours du thème "Différenciations et hétérogénéités", actes de la 13ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques (à paraître)*

Hache C.; Robert A. (1997) : Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde *Cahier de DIDIREM numéro 28, IREM de Paris7*

Hache C. (2001) L'univers des mathématiques proposé par le professeur en classe, *Recherches en didactique des mathématiques, vol 21.1-2 pp 81-98*

Horoks J.(2004), Des tâches proposées aux activités des élèves sur les triangles semblables en classe de 2nde : une comparaison entre ce qui est fait en classe et ce qui est fait lors de évaluations, *Cahier DIDIREM n°47*

Pariès M. (2004) Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques, vol 24/2-3 pp 251-284*

Perrin M.J. et Robert A.(2005) Une étude à deux voix à partir d'une vidéo *:* utiliser les outils de la double approche et de la théorie des situations pour analyser un corpus de données sur les pratiques enseignantes, *Présentation et réflexion collective, Séminaire DIDIREM*

Robert A. (1988) Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels, *Les cahiers de Didactique n°51, IREM de Paris 7*

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, *Vol 18 2 pp. 139-190.*

Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, *Vol 21/1-2, pp. 57- 80*

Robert A. (2002) : Analyses de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré). Livret d'accompagnement *brochure APM, fascicule IREM de Paris7*

Robert A. et Rogalski J (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *vol 2.4 pp 505-528.*

Robert A. et Rogalski M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe *Revue Petit x*, *n° 60.*

Robert A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Revue Petit x, n° 62, pp 61-71.*

Robert A. (2004) **:** Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants perspectives en formation d'enseignants *Petit x. numéro. 65. p. 52-79, IREM de Grenoble*

Robert A. (2005) : Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré *Petit x numéro 67. p. 63-76, IREM de Grenoble*

Robert A. (2005) : Quelles différences y a-t-il... ? *Bulletin de l'APMEP numéro 457*

Robert A. (2005) : De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique *Annales de didactique et de sciences cognitives.*

V. 10. p. 209-249, publication des travaux du séminaire de Didactique des mathématiques de l'IREM de Strasbourg

Roditi E.(2004) : Le théorème de l'angle inscrit au collège. Analyse d'une séance d'introduction et perspectives pour la formation. *Cahier de DIDIREM numéro 45, IREM de Paris7*

Roditi E. (2005), Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique, *l'Harmattan.*

Evaluation

Rogiers X. (2004), des situations pour évaluer les compétences des élèves, *collection PED, éditions de boeck*

Didactique des mathématiques

Brousseau G. (1988) Théorie des situations didactiques, *la pensée sauvage*

Chevallard Y (1985) La transposition didactique, 1ère édition, *Grenoble, la pensée sauvage*

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, vol 19.2, pp 221-266*

Dorier J.L. (1997) Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions, *HDR Université Joseph Fourier Grenoble 1*

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 7.2 pp 5-31*

Félix C. (2004) Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste, *Revue Spirale n°33, pp 89-100 (Lille).*

Matheron Y.et Noirfalise R. (2002) L'aide individualisée : entre système didactique auxiliaire inutile et déficit d'analyse didactique entravant son efficacité et son développement, *revue Petit x n°60, pp 60-82*

Cabri

Clarou P., Laborde C., Capponi B. (2001), géométrie avec cabri, scénarios pour le lycée, collection Objectif multimédia, éditions CRNDP

Géométrie

Arsac G (1996), L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, *Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques de Saint Jean d'Angély, IREM de Clermont-Ferrand*

Bkouche R. (1997), Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie, *repères IREM n°26, pp 49-71*

Bkouche R. (2000) Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, *bulletin APMEP n°430, pp 613-629*

Bkouche R. (2000), Sur la notion de perspective historique dans l'histoire d'une science, *Repères IREM n°39, pp 35-59*

Bkouche R. (2002), Du raisonnement à la démonstration, *Repères IREM n°47, pp 41-64*

Bkouche R. et Delattre J. (1993), Histoire de Problèmes. Histoire des mathématiques. Quand mouvement et géométrie se rencontrent, *Ellipse, Paris.*

Bkouche R. (1991), De la géométrie et des transformations, *Repères IREM n°4 , pp 134-158*

Chabert J.L. (1990) Les géométries non euclidiennes, *Repère IREM n°1*

Daubelcour J.P (2004)., Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au XXème siècle en terminale scientifique, *Fascicule de l'IREM de Lille*

Houdement C. et Kuzniak A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 20.1. pp 89-116.*

Richeton J.P., (2001) Géométrie en classe de 2nde, anciens et nouveaux outils *bulletin APMEP n°435, pp 445-455*

Robert, A. (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *revue petit x n°63, pp 7-29*

Walter A., (2000) Quelle géométrie pour l'enseignement au collège ? *petit x n°54 pp 31-49*

Cours particuliers

Bobasch M. (2000) Les cours particuliers à domicile *journal le Monde, 7 avril 2000*

Ducharne J. (2002) Soutien scolaire : quand la demande devient primaire *journal le Figaro de septembre 2002*

Horoks J. (2002), Une analyse didactique de cours particuliers de mathématiques : tâches et activités des élèves, Mémoire de DEA sous la direction d'Aline Robert.

Laronche M. (2003) Le marché des cours particuliers prospère sur l'angoisse des parents *journal le Monde, du 11 mars 2003*

Rabinowitz A. (2002) Le très grand boom des petits cours *journal le Nouvel Observateur de mars 2002*

Rabinowitz A. et Walter E. (2002) La très grande chasse à (petits) cours *journal le Nouvel Observateur, de septembre 2002*

Manuels de mathématiques

Commeau J.(1963) , manuel de la collection Cagnac G. et Thiberge L., *Ed. Masson*

Dieudonné J. (1978), Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, *Ed. Hermann*

Donnedu A. (1967), Géométrie, collection l'enseignement de mathématiques, *Ed. Dunod*

C. Lebossé et C. Hémery (1951), Algèbre, Arithmétique et Géométrie, classe de 4ème des lycées et collèges, *Ed. Nathan 1951*

Transmath (2000), Antibi S.,Ed. Nathan

Pythagore 2nde (2000), Koechlin B. et Simsolo P., Ed. Hatier

Pyramide (2000), Ed. Hachette éducation

Fractale (2000) Bontemps, Ed. Bordas

Déclic (2000), Ed. Hachette éducation

Maths 2nde (2000), Ed. Breal

Indices (2000), Deledicq, Ed. Bordas

Dimathème (2000), Ed. Didier

Hyperbole (2000), Malaval J., Ed. Nathan

Mathématiques seconde, Plaud P., Ed. Delagrave

Mathématiques 2nde (2000), Bouvier J.P., Ed. Belin

ANNEXES

- Questionnaire DEUG – Cours particuliers
- Lettre aux chefs d'établissement
- Tableau pour la description raisonnée

- Accompagnements pour le programme de géométrie en classe de 2nde (rentrée 2000)
- Les définitions, postulats et axiomes d'Euclide
- Les 23 axiomes de la géométrie de Hilbert
- Eléments de géométrie affine euclidienne
- Démonstration des équivalences entre les cas de similitude
- Démonstration de l'équivalence entre les 2 définitions

- Cours distribué par Mme B. (2 feuilles)
- Devoir à la maison chez Mme B.
- Modules 1&2 chez Mme B.
- Enoncé du contrôle de Mme B.
- Découpage des séances de Mme B. (en fonction des tâches)
- Correspondance avec Mme B.

- Découpage des séances de Mme P.
- Correspondance avec Mme P.
- Analyse des activités tâche par tâche chez Mme P.

- Découpage des séances de Mme F.
- Analyse des activités tâche par tâche chez Mme F.

- Analyse des données : coordonnées et valeurs-test des modalités axes 1 à 5

QUESTIONNAIRE DEUG - COURS PARTICULIERS

Etablissement :
Section :

Avez vous déjà pris des cours particuliers en mathématiques ? OUI / NON

Si OUI précisez :

en quelle(s) classe(s) :

à quelle fréquence : (chaque semaine, avant un contrôle, de manière ponctuelle …)

la nature de votre demande : (révision des contrôles, explication du cours, acquisition de méthodes de travail à la maison …)

les effets positifs de ces cours : (amélioration de vos résultats, meilleure compréhension du cours, plus grande confiance en vous …)

les effets négatifs de ces cours : (ou l'absence d'effet !)

Des membres de votre famille vous ont-ils aidé(e) dans votre travail scolaire en mathématiques ?
OUI / NON

Si OUI précisez :
jusqu'à quelle classe :

à quelle fréquence :

Quel est le niveau d'étude des membres de votre famille proche ?

Donnez vous des cours particuliers en mathématiques ? OUI / NON
Si OUI précisez :

en quelle(s) classe(s) :

Merci pour votre aide !

A Mesdames et Messieurs les chefs d'établissements

Madame, Monsieur,

Je suis étudiante à l'université Paris 7 et je prépare depuis plus d'un an une thèse en Didactiques des Mathématiques, thèse pour laquelle j'ai choisi de me pencher sur le travail enseignant en classe de seconde, et sur ses liens étroits avec les apprentissages des élèves dans cette matière.

Pour me permettre d'avancer dans mes recherches, j'ai besoin d'avoir accès à des cours de mathématiques, et de les enregistrer, afin de pouvoir les analyser par la suite. L'un de vos professeurs, Mme F., a eu l'extrême générosité de m'ouvrir les portes de l'une de ses classes ; aussi je sollicite auprès de vous aujourd'hui la permission de filmer, dans les semaines qui viennent, quelques séances de ses cours.

La caméra est placée au fond de la salle, axée sur le tableau. Les rares images d'élèves qui y sont enregistrées montrent au maximum leur tête de dos. Je me porte garante que l'utilisation de ces vidéos est exclusive de toute utilisation qui ne serait à des fins de recherche universitaire, respectant les conditions déontologiques qui y sont attachées.

Dans l'hypothèse où les conditions d'exercice du métier d'enseignants dans votre établissement nécessiterait un surcroît de précautions à l'occasion d'un tel enregistrement –notamment auprès des parents d'élèves- et que mon intervention vous semblerait souhaitable sous une forme que vous nous dicteriez, il vous suffirait de m'en faire la demande.

Vous remerciant de votre collaboration, je vous prie d'agréer l'expression de mes sentiments distingués.

TABLEAU POUR LA DESCRIPTION RAISONNEE

Etablissement :
Classe (indiquer le type de classe) : (Renseigner un tableau par classe de seconde)

	Contenus : présentation chronologique	Durée approximative de chaque activité	Déroulement de chaque activité Interventions de l'enseignant : aides, corrections	Formes de travail des élèves	Travail donné à la maison (noté ou non)
Séance 1	Activités d'introduction, Cours (définition…) Donner des références précises ou le cours Exercices Donner des références précises ou les énoncés		Cf. ci-dessous		
Séance 2	idem				
jusqu'à la dernière séance	contrôle				

Fournir les énoncé de contrôle ou de devoir, le nom du manuel et les numéros des exercices

Pour décrire les déroulements, indiquer :
* la forme de travail des élèves (travail individuel, en petits groupes, cours dialogué, etc.…) avec les temps de recherche s'il y a lieu
* la nature des interventions du prof : encouragements ou avertissements (non mathématiques) - facultatif, aides, évaluations.

Evaluations : correction par le prof ou par un élève, avec sollicitations des élèves ou non…

Aides :
* moment (démarrage, pendant, à la fin)
* De quelle forme : questions, échanges, réponses, indications positives
* De quelle nature : précis ou non, direct ou non, méthodes, découpages, rappels de cours, bilans,
* Sur quoi ça porte : mathématiques (précises ou non), travail, forme (rédaction)

à propos du travail à la maison :
* quel type de tâches, quelle quantité
* quel rapport avec ce qui est fait en classe
* quelle préparation en classe

à propos des contrôles :
* qu'est ce qui est testé ?
* quel rapport avec ce qui est fait en classe
* quelle préparation en classe

Géométrie

Pour toute la partie géométrie, le programme donne deux orientations fondamentales :
– **prendre du temps** pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes – en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration) ;
– **s'appuyer sur des notions fortement liées à la perception** pour progresser dans la maîtrise des savoirs géométriques. S'il est vrai, en effet, que la géométrie sert à dépasser par la pensée les limites de la perception et donne ainsi un pouvoir sur le plan et l'espace (tel Thalès face à la pyramide de Kheops), il reste vrai qu'à ce niveau d'études la formation géométrique doit continuer de s'appuyer sur des manipulations ou constructions d'objets, sur l'observation ou la recherche de régularités entre ces objets.
Le programme de seconde a donc limité le nombre de notions nouvelles à introduire et propose de s'appuyer avant tout sur les acquis du collège. De même, le programme invite à limiter le nombre d'exemples ou problèmes étudiés : ceux-ci seront à choisir avec soin pour leur richesse (méthodologique, paradigmatique, épistémologique, didactique, mathématique, historique, etc.). Ce choix relève de la responsabilité de chaque enseignant ; il sera facilité par l'absence relative de contenus nouveaux voulue par le programme et devrait permettre à chaque classe un fonctionnement quelque peu libéré des contenus et centré sur l'acquisition d'une démarche mathématique.

Les configurations du plan

Comme indiqué plus haut, le programme propose de s'appuyer sur les seules notions apprises au collège ; les transformations déjà étudiées continueront donc d'intervenir au même titre que les configurations. Il invite également à prendre du temps pour la recherche et la résolution de problèmes.

Pour éviter les révisions systématiques, le programme propose d'introduire les notions de triangles isométriques et de triangles de même forme. En cohérence avec les choix exprimés au début du paragraphe Géométrie, on s'appuiera sur la perception. Ainsi, par exemple, la question « Combien d'informations faut-il pour construire un triangle ? » amène les élèves à donner des réponses fondées sur leur intuition et leur culture du collège ; la mise en forme de ces réponses et la construction effective d'un triangle ABC avec des données imposées (a, b et c ; ou $\hat{A}$, b et c ; ou a, $\hat{B}$ et $\hat{C}$; sans oublier des tentatives avec $\hat{A}$, a et b ou $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$) conduisent aux trois façons traditionnelles de caractériser des triangles isométriques ; les transformations étudiées au collège (translation, rotation, symétrie axiale) suffisent pour justifier, si besoin est, ces résultats, mais cette justification n'est pas un objectif du programme.

De façon analogue, la question « Parmi ces triangles lesquels ont la même forme ? » débouche sur la notion de triangles de même forme ou semblables. Il est à noter que la définition conseillée ici par le programme répond au souci déjà exprimé de s'appuyer sur la perception. Le passage à la caractérisation de deux triangles semblables à l'aide d'un coefficient d'agrandissement-réduction, que l'on appellera *rapport de similitude*, pourra s'appuyer sur l'étude des triangles isométriques et les propriétés de Thalès étudiées en classe de troisième (rappelées ci-dessous).

Il faut souligner ici l'effort important entrepris au collège pour différencier le résultat *observé* du résultat *démontré* et pour annoncer clairement le statut des divers énoncés : définition, résultat ou théorème admis sur conjecture, résultat ou théorème établi, etc. (cf. *Document d'accompagnement des programmes de 5ᵉ – 4ᵉ*). Il importe de garder cet esprit dans le travail conduit en seconde, en particulier dans ce paragraphe de géométrie. Ainsi, l'enseignant décidera, en fonction de ses élèves et du temps dont il dispose, du caractère *admis* ou *démontré* des trois cas d'isométrie des triangles. Cela supposera au préalable le choix par l'enseignant d'une définition des triangles isométriques ; celle qui s'inscrit le plus naturellement dans le fil des programmes du collège, où l'on a construit des images de figures géométriques par symétries axiale ou centrale, par translation ou par rotation, pourrait s'énoncer ainsi : « Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une translation, une symétrie axiale, une rotation ou une succession de telles transformations. » Une autre définition, plus intuitive, pourrait être : « Deux triangles sont isométriques s'ils ont des côtés et des angles respectivement égaux. »

Une définition étant posée, l'objectif est d'atteindre rapidement les cas d'isométrie. Que ceux-ci soient admis ou démontrés, on n'oubliera pas que tout résultat doit être légitimé dans l'esprit des élèves pour qu'il s'inscrive naturellement dans le corpus antérieur de connaissances.

La définition générale d'une isométrie n'est pas un acquis du collège et n'est en aucun cas un objectif de la classe de seconde ; cela n'empêche pas l'utilisation du qualificatif *isométrique* ou de l'expression *cas d'isométrie* ; ces expressions paraissent préférables à celles de *triangles égaux* ou *cas d'égalité*, courantes il y a plusieurs décennies : l'usage de ces dernières contredirait la notion d'égalité encore en voie

d'acquisition par les élèves, pour qui la diversité des dénominations d'un même objet pose encore problème.
Par contre le programme laisse à chaque enseignant la liberté de choisir entre les expressions *triangles de même forme* – proche de l'intuition – ou *triangles semblables* – dénomination mathématique ; il conviendra néanmoins que les élèves sachent leur synonymie.
À propos du théorème de Thalès, il est rappelé l'énoncé exact des deux théorèmes étudiés en troisième :

– « Soient d et d' deux droites sécantes en A ; soient B et M deux points de d, distincts de A ; soient C et N deux points de d', distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. »

– « Soient d et d' deux droites sécantes en A ; soient B et M deux points de d, distincts de A ; soient C et N deux points de d', distincts de A. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles. »

On pourra donc, en seconde, déduire du cas direct énoncé ci-dessus des égalités nouvelles du type $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, ou d'autres dans une configuration plus générale.
Aucun développement n'est demandé en seconde sur les notions d'orientation d'une figure : l'observation et les mots pour la dire suffiront. Pour les angles, on partira du point de vue intuitif adopté au collège et les angles géométriques seront mesurés en degré ou en radian. À propos des rotations, il sera commode, en liaison avec la notion de cercle trigonométrique, de mesurer les angles entre $-180°$ et $180°$ (ou entre $-\pi$ et π) et d'introduire alors le terme d'angle orienté.
Comme le dit le programme, les deux points de vue développés ci-dessus (triangles isométriques et triangles de même forme) répondent à un souci de faire revivre les acquis du collège en évitant les révisions systématiques ; il en est de même de l'invitation à résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires. L'intention est claire : il s'agit avant tout de faire réfléchir et travailler les élèves sur des problèmes réinvestissant la totalité des acquis antérieurs (configurations, transformations, vecteurs).
Ce sera l'occasion de s'attarder sur l'apprentissage d'une démarche déductive et la maîtrise d'un vocabulaire logique (voir aussi le paragraphe Rédaction, logique, notations de ce document) : le programme en parle ici de façon explicite, mais ce n'est bien sûr pas pour l'exclure des autres parties du programme.

LES DEFINITIONS, POSTULATS ET AXIOMES D'EUCLIDE

35 définitions :

- un **point** est ce dont la partie est nulle
- une **ligne** est une longueur sans largeur
- les extrémités d'une ligne sont des points
- la **ligne droite** est celle qui est également placée entre ses points
- une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur
- les extrémités d'une surface sont des lignes
- la **surface plane** est celle qui est également placée entre ses droites
- un a**ngle plan** est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction
- lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme **rectiligne**
- lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est **droit**, et la droite placée au dessus est dite **perpendiculaire** à celle sur laquelle elle est placée
- l'angle **obtus** est celui qui est plus grand qu'un droit
- l'angle **aigu** est celui qui est plus petit qu'un droit
- on appelle **limite** ce qui est l'extrémité de quelque chose
- une **figure** est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites
- un **cercle** est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme **circonférence** ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles
- ce point se nomme le **centre** du cercle
- le **diamètre** du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales
- un **demi-cercle** est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutenue par le diamètre
- un **segment de cercle** est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment
- les **figures rectilignes** sont celles qui sont terminées par des droites
- les **figures trilatères** sont terminées par trois droites
- les **quadrilatères** par quatre
- les **multilatères** par plus de quatre
- parmi les figures trilatères, le **triangle équilatéral** est celle qui a ses trois côtés égaux

- le **triangle isocèle**, celle qui a seulement deux côtés égaux
- le **triangle scalène**, celle qui a ses trois côtés inégaux
- de plus, parmi les figures trilatères, le **triangle rectangle** est celle qui a un angle droit
- le **triangle obtusangle**, celle qui a un angle obtus
- le **triangle actuangle**, celle qui a ses trois angles aigus
- parmi les figures quadrilatères, le **quarré** est celle qui est équilatérale et rectangulaire
- le **rectangle** est celle qui est rectangulaire et non équilatérale
- la **rhombe** celle qui est équilatérale et non rectangulaire
- le **rhomboïde** celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale, ni rectangulaire
- les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment **trapèzes**
- les **parallèles** sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre

5 postulats

- Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque
- Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie
- D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle
- Tous les angles droits sont égaux entre eux
- Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petit que deux droits, ces droites prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits

9 axiomes :

- les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles
- si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux
- si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux
- si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux
- si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux
- les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles
- les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles
- les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles
- le tout est plus grand que la partie

LES 23 AXIOMES DE LA GEOMETRIE DE HILBERT

Les 23 axiomes sont répartis suivant 5 grands types de relation :

- *appartenance :* axiomes I, 1 à 8
- *ordre :* II, 1 à 4
- *congruence :* III, 1 à 5
- *parallélisme :* IV
- *continuité :* V, 1 et 2

axiomes d'appartenance (les huit se résument aux cinq axiomes suivants)

- *Deux points distincts sont sur une et une seule droite*
- *Sur une droite il y a au moins deux points. Il existe au moins trois points non alignés*
- *Trois points non alignés sont sur un et un seul plan*
- *Si deux points d'une droite sont sur un plan, tous les points de la droite sont sur ce plan*
- *Il existe au moins quatre points non coplanaires*

axiomes d'ordre :

- *Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B, C sont sur une droite et B est aussi entre C et A*
- *Etant donné deux points A et C, il existe au moins un point B sur la droite (AC) qui soit entre A et C*
- *De trois points d'une droite, il n'y a pas plus d'un qui soit entre les deux autres*
- *Si une droite du plan d'un triangle ne passe par aucun des sommets et rencontre un des côtés, alors elle rencontre l'un des deux autres côtés (axiome de Pasch)*

axiomes de congruence :

- Sur une droite donnée et d'un côté d'un point A donné, il existe un point B tel que le segment AB soit congruent à un segment donné
- Si deux segments sont congruents à un même troisième, ils sont congruents entre eux
- Si B est entre A et C, si B' est entre A' et C', si AB et A'B' sont congruents et si BC et B'C' sont congruents, alors AC et A'C' sont congruents
- Dans un plan donné, et d'un côté d'une demi-droite h donnée, il existe une unique demi-droite k telle que l'angle (h,k) soit congruent à un angle donné
- Si dans deux triangles ABC et A'B'C', on a les congruences entre les segments AB et A'B', entre les segments AC et A'C' et entre les angles BAC et B'A'C', alors on a aussi la congruence entre les angles ABC et A'B'C'

axiome des parallèles :

- Par un point A extérieur à une droite d, dans le plan déterminé par A et d, il passe au plus une parallèle à d

axiomes de continuité:

- Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduise à un point situé au-delà de B
- L'ensemble des points d'une droite n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle soient encore valables les axiomes (II , 1 à 3), (III , 1 à 3) et (V , 1)

ELEMENTS DE GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

*Si E est un espace vectoriel sur un corps K, une structure d'**espace affine** de direction E est la donnée pour tout couple (A,B) de $E \times E$ d'un vecteur associé noté AB de sorte que :*

- $\forall (A, B, C) \in E^3$, $AB + BC = AC$
- $\forall M \in E$, $\forall u \in E$, $\exists! N \in E$, $u = MN$

Les éléments de E sont appelés des *points,* E est *l'espace vectoriel* ou *espace directeur de E*.

*Un **espace affine euclidien**,(ou tout simplement espace euclidien), est un espace affine E dont la direction est un espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire.*

*Un **produit scalaire euclidien** sur un espace vectoriel réel (de corps R) de dimension finie est une application $\varphi : E \times E \to R$ qui, à tout $(u , v) \in E \times E$, associe un scalaire $\varphi (u , v)$, noté u.v, et qui est :*

- *bilinéaire (i.e. linéaire en u et linéaire en v),*
- *symétrique (i.e. $\varphi (u , v) = \varphi (v , u)$ pour tous vecteurs u, v)*
- *et strictement positive pour tout couple (u , u) tel que $u \neq 0$ (i.e. $\varphi (u , u) > 0$)*

C'est ce produit scalaire qui nous permet de définir une distance sur l'espace E . On définit d'abord la norme d'un vecteur :

Pour tout vecteur u, on notera $//u//$ la racine carrée du carré scalaire de u, c'est-à-dire $\sqrt{u.u}$

*On appelle alors **norme euclidienne** sur E l'application $u \to //u//$, qui possède ces trois propriétés :*

- $\forall u \in E$, $//u// = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $\forall (\lambda , u) \in R \times E$, $//\lambda u// = |\lambda| * //u//$
- $\forall (u , v) \in E^2$, $//u + v// \leq //u// + //v//$

Si M et N sont deux points de E, la longueur du segment [MN], notée MN, est la norme euclidienne du vecteur MN, c'est à dire, en reprenant les notations précédentes, $//MN//$.

La dimension de l'espace affine est la dimension de son espace vectoriel. Nous travaillerons ici en dimension 2.

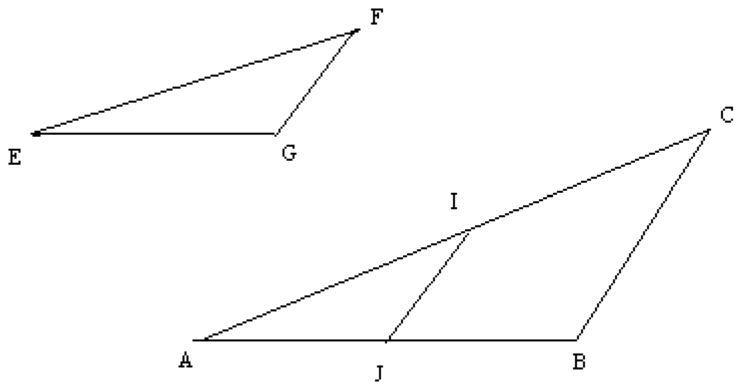
DEMONSTRATIONS DES EQUIVALENCES ENTRE LES DIFFERENTS CAS DE SIMILITUDE

(tirées de ABDELJAOUAD M. (2000), éléments de géométrie du plan (Tome 1), publication de l'Association tunisienne des Sciences Mathématiques)

1) les triangles ABC et EFG sont semblables si et seulement si
   A = E et B = F

2) deux triangles ABC et EFG sont semblables si et seulement si
   A = E et AB/EF = AC/EG

3) deux triangles ABC et DEF sont semblables si et seulement si
   AB/EF = BC/FG = CA/GE



Sans perte de généralité, on peut supposer que AB > EF et porter [EF] sur [AB]. On note I le point de [AB] tel que AI = EF. La parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en un point J.

1^{er} cas $\Rightarrow 2^{ème}$ cas

On suppose que A = E, B= F et C = G. Comme AIJ = ABC = EFG, A = E et AI = EF, les deux triangles AIJ et EFG sont isométriques, d'où EG = AJ et ainsi que IJ = FG. D'après le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (IJ) et (BC) et à leur parallèle passant par A.

AI/AJ = AJ/AC, c'est à dire EF/AB = AI/AB = AJ/AC = EG/AC. D'où AB/EF = AC/EG.

$2^{ème}$ cas $\Rightarrow 1^{er}$ cas

On suppose que A = E et AB/EF = AC/EG, c'est à dire AB/AC = EF/EG. Comme (IJ) est parallèle à (BC), on a d'après le théorème de Thalès AI/AB = AJ/AC.

D'où AI/AJ = AB/AC = EF/EG = AI/EG, et ainsi AJ = EG. Les deux triangles AIJ et EFG sont donc isométriques, il s'en suit la similitude des triangles ABC et EFG

1^{er} cas $\Rightarrow 3^{ème}$ cas

Dans la proposition précédente, nous avons montré que si les deux triangles ABC et EFG sont semblables, alors AB/EF = AC/EG et A = E. Le même raisonnement montre que BC/BA = FG/FE et CA/CB = GE/GF ; d'où les égalités de rapports cherchés.

$3^{ème}$ cas $\Rightarrow 1^{er}$ cas

Réciproquement, supposons que AB/EF = AC/EG = BC/FG = k. Nous voulons montrer que les angles des triangles ABC et AFG sont deux à deux isométriques. Sans perte de généralité, supposons que AB > EF. Soient I et J les points de [AB] et de [AC] tels que AB = k AI et AC = k AJ. On mène de I la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en H tel que AC = k AH (d'après le théorème direct de Thalès), d'où k AH = k AJ et H = J. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (IJ) est parallèle à (BC). Les angles AIJ et ABC sont isométriques et BC = k IJ. Comparons les triangles EFG et AIJ, leurs côtés sont deux à deux isométriques, ils sont donc eux-mêmes isométriques. Les angles des triangles ABC et EFG sont donc deux à deux égaux

DEMONSTRATION DE L'EQUIVALENCE ENTRE LES 2 DEFINITIONS : CAS DE SIMILITUDE ET TRANSFORMATIONS

(tirées de ABDELJAOUAD M. (2000), éléments de géométrie du plan (Tome 2), publication de l'Association tunisienne des Sciences Mathématiques)

Soient ABC et A'B'C' deux triangles quelconques du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes : * (S) : il existe une similitude unique qui transforme le triangle ABC en A'B'C' * (1^{er}, $2^{ème}$ou $3^{ème}$ cas) : les deux triangles vérifient l'un des critères de similitude

Etant démontrée l'équivalence des cas de similitude, nous allons montrer seulement

(S) $\Rightarrow$ ($3^{ème}$ cas) et ($2^{ème}$ cas) $\Rightarrow$ (S)

(S) $\Rightarrow$ $3^{ème}$ cas

Soient ABC un triangle quelconque et A' l'image de A par une similitude f_k de rapport k, B' l'image de B et C' l'image de C. Alors A'B' = k AB, B'C' = k BC et C'A' = k CA. Comme l'image d'un segment par une similitude est un segment, il est clair que l'image du triangle ABC est un triangle A'B'C' qui lui est semblable au sens classique (vérifiant le $3^{ème}$ cas)

$2^{ème}$ cas $\Rightarrow$ (S)

L'unicité est une conséquence du fait que si deux similitudes ont les mêmes images pour trois points du plan non alignés, alors ces similitudes sont identiques (particulièrement une similitude du plan admettant 3 points fixe est l'identité).

Supposons que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables, on a alors A = A' et A'B'/AB = A'C'/AC. Posons k = A'B'/AB et notons h l'homothétie de centre A et de rapport k, elle transforme B en un point E et C en un point F tels que AE/AB = AF/AC = k = A'B'/AB = A'C'/AC, d'où AE = A'B' et AF = A'C' et comme A = A', les deux triangles AEF et A'B'C' sont isométriques et il existe une isométrie f qui transforme AEF en A'B'C'. D'où f o h est une similitude qui transforme le triangle ABC en A'B'C'.

Triangles semblables

I - Définition - applications

Deux triangles semblables ont leurs trois angles respectivement de même mesure.

application n°1

Soit ABC et RST deux triangles tels que $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 73°$, $\widehat{R} = 73°$ et $\widehat{S} = 45°$.
Ces deux triangles sont-ils semblables ?

application n°2

ABC et MNP sont deux triangles rectangles respectivement en $\widehat{A}$ et $\widehat{P}$ tels que $\widehat{B} = 60°$ et $\widehat{M} = 60°$.
Ces deux triangles sont-ils semblables ?

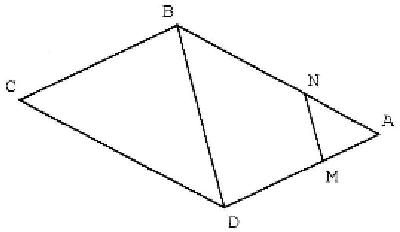
Remarque : Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient ....
Le démontrer.

Exercice n°1 : Citer des triangles semblables.

Exercice n°2 : (C) est un cercle. Soit I point situé dans le cercle. Deux cordes du cercle [AC] et [BD] sont sécantes en I. *(on évitera que I soit confondu avec le centre du cercle)*. Démontrer que les triangles IAB et IDC sont semblables.

Exercice n°3

ABCD est un parallélogramme. Le point M de [AD] et le point N de [AB] sont tels que la droite (MN) est parallèle à la droite (BD).
1°) Démontrer que les triangles AMN et ADB sont semblables.
Dans quelle configuration sont placés les triangles AMN et ADB ?
Ecrire les égalités de rapport qui en découlent.
2°) Démontrer que les triangles AMN et CDB sont semblables.
Peut-on écrire une égalité de rapport ? Si oui, laquelle ?
3°) Que peut-on conjecturer ?



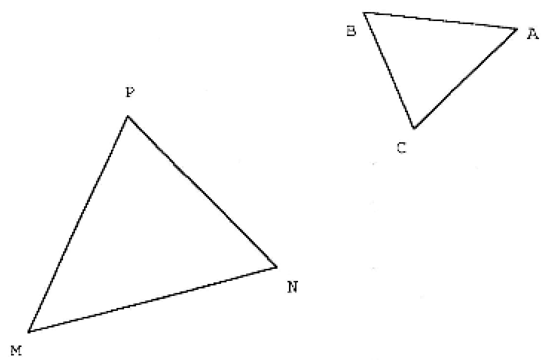
II - Propriété

Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont proportionnels

Démonstration

Pour se fixer les idées, faisons une figure.
Soient deux triangles ABC et MNP tels que :
$\widehat{A} = \widehat{M}$ et $\widehat{B} = \widehat{N}$.

1° Que peut-on dire des triangles ABC et MNP ?
2° Construire le triangle PRS tel que
   ☞ PR = CA avec $R \in [PM]$
   ☞ PS = CB avec $S \in [PN]$.
   Que peut-on dire des triangles ABC et PRS ?
3° Démontrer que les droites (RS) et (MN) sont parallèles.
4° Conclure.



Définition Le coefficient de proportionnalité k faisant passer des longueurs des côtés d'un triangle à celles d'un triangle semblable est appelé rapport de similitude.

Propriété Si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en MNP alors aire (MNP) = k^2 × aire (ABC)

Application

ABCD est un parallélogramme.
N est un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.
1° Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2° En déduire que DN × BM = AB × AD

III - Réciproque : Caractérisation des triangles semblables

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ils sont semblables.

Démonstration

Pour se fixer les idées, faisons une figure .

* Dessiner deux triangles ABC et MNP tels que : AB = 3 , BC = 5 et AC = 6
PM = 9, MN = 4,5 et PN = 7,5

Montrer que les côtés des triangles ABC et MNP sont proportionnels.

* Dans le triangle MNP, construire - le point A' sur [PM] tel que PA' = CA
- le point B' sur [PN] tel que PB' = CB.

Montrer que les droites (A'B') et (MN) sont parallèles.
En déduire que les triangles ABC et MNP sont semblables.

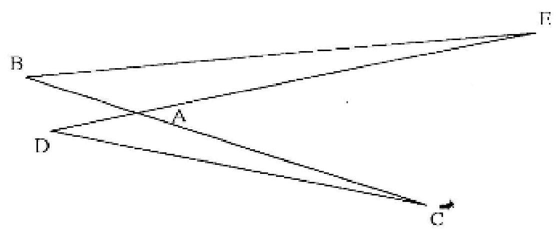
Remarque : *2 côtés proportionnels ne suffisent pas pour avoir des triangles semblables.*
Construire deux triangles ABC et MNP tels que AB = 3, BC = 5 et AC = 6
MN = 4,5, NP = 7,5 et MP = 8
Ces triangles ont-ils des côtés proportionnels ? Sont-ils semblables ?

Variante admise:
Deux triangles ayant un angle de même mesure compris entre deux côtés proportionnels sont semblables

Exercices

Exercice n°1

Les droites (BC) et (DE) sont sécantes en A.
On donne AB = 28, AE = 96, AD = 21 et AC = 72 (les mesures sont en mm).
1° Démontrer que les triangles DAC et BAE sont semblables.
2° Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?



Exercice n°2

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 2 et BC = 3 et DEF un triangle rectangle en D tel que ED = 1,6 et EF = 2,4.
1° Démontrer que les triangles ABC et DEF sont semblables.
2° Indiquer les sommets homologues.
3° Calculer le rapport $\dfrac{aireABC}{aireDEF}$.

DEVOIR A LA MAISON Mme B.

Devoir de seconde triangles semblables
Pour le vendredi 14 mars 2003

ABC est un triangle isocèle de sommet A. H est le pied de la hauteur issue de A.
On donne BC = 160 mm et AH = 60 mm.
1° Faire une figure.
2° Calculer AB et AC.
3° D est le point de [BC] tel que BD = 35 mm et E le point de [BA] tel que BE = 56 mm.
 a - Démontrer que les triangles BAC et BDE sont semblables.
 b - En déduire ED.
4° Calculer AD.
5° **a** - Prouver que le triangle DAC est rectangle en A.
 b - Montrer que les points E, A, C, D sont sur un même cercle dont on donnera le diamètre.

module de seconde — triangles semblables (1)

Exercice n°1

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r, [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et P est le point de [AB] tel que $AP = \frac{1}{3}r$.

Une droite **d** distincte de la droite (AB) passe par P et coupe le cercle en deux points M et N.

1° Démontrer que les triangles APM et NPB sont des triangles semblables.

2° En déduire que $PM \times PN = \frac{5}{9}r^2$

Exercice n°2

Soit ABC un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur issue de A.

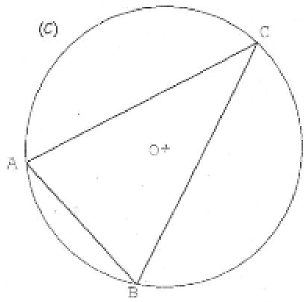
1° Prouver que les triangles AHB et AHC sont semblables au triangle ABC.

2° Déterminer les rapports $\frac{aireABH}{aireABC}$ et $\frac{aireACH}{aireABC}$ en fonction de AB, AC et BC.

Puis en déduire le rapport $\frac{aireABH + aireACH}{aireABC}$ en fonction de AB, AC et BC.

3° En déduire le théorème de Pythagore.

module de seconde — triangles semblables (2)



Exercice n°1

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

[AH] est une hauteur du triangle ABC. La droite (AO) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D.

1° Démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.

2° On pose $AB = c$, $AC = b$ et $AH = h$. Déduire de la question précédente que $bc = 2rh$

Exercice n°2

ABC est un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ est son cercle circonscrit. M est un point de l'arc AB du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas le point C.

I est le point de la corde [MC] tel que MI = MA.

1° Démontrer que les triangles ABC et AMI sont de même forme.

2° Démontrer que les triangles AMB et AIC sont isométrique.

3° En déduire que MA + MB = MC.

Contrôle de seconde

triangles semblables

samedi 22 mars 2003

Exercice n°1

ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables, les sommets A', B', C' étant homologues respectivement de A, B, C. Sachant que AB = 5, AC = 3, BC = 7, déterminer x pour que : A'B' = $7 + x$ et A'C' = $x + 2$.

Exercice n°2

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 et AC = 5.

Le triangle A'B'C' est un triangle rectangle en B' tel que A'C' = $\frac{5}{3}$ et A'B' = 1.

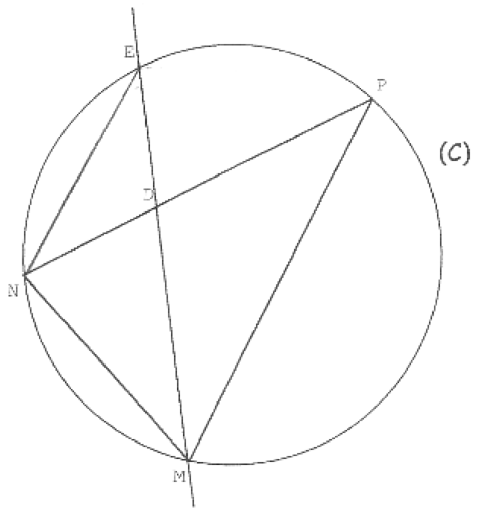
Démontrer que ces deux triangles sont semblables.

Exercice n°3

On considère un cercle $(\mathcal{C})$ et MNP un triangle inscrit dans ce cercle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$ coupe [NP] en D et $(\mathcal{C})$ en E.

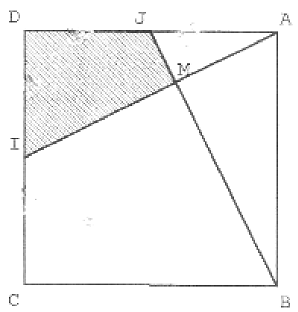
1° Démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables.
2° En déduire que $EN^2 = EM \times ED$
3° Démontrer que le triangle EDP et le triangle EMP sont semblables. En déduire EP^2
4° Que peut-on en conclure ?.



Exercice n°4

ABCD est un carré de coté a.
I et J sont les milieux respectifs de [CD] et [DA].
Les droites (BJ) et (AI) sont sécantes en M.

1° Démontrer que les triangles ADI et BAJ sont isométriques.
2° Démontrer que les triangles AMJ et ADI sont semblables.
3° Démontrer que $\frac{AJ}{AI} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Puis en déduire le rapport $\frac{aireAMJ}{aireADI}$.
4° En déduire quelle fraction de l'aire du carré représente l'aire de la surface hachurée.



DECOUPAGE DES SEANCES DE Mme B.(en fonction des tâches)

45 min 35	**première séance**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
4 min	**rappels** de cours sur les triangles isométriques		questions simples posées aux élèves, qui prennent la parole pour répondre
1 min 30	**introduction** du nouveau cours sur les triangles semblables		discours de la prof les élèves prennent leur cahier
10 min 20	**application 1** : démontrer que deux triangles sont semblables à partir de deux angles donnés numériquement on a besoin : - de la définition D1 - de la somme des 3 angles d'un triangle	1 min 10	mise en route
		2 min 55	les élèves cherchent, la prof passe dans les rangs sans s'adresser à la classe entière
		1 min 25	la prof relance la recherche: rappel de la consigne, de la définition, aide indirecte "qu'est-ce qu'il faut faire"
		1 min	la prof écrit l'énoncé et découpe en sous-tâches isolées : il faut calculer le troisième angle pour appliquer la définition de semblable
		1 min	les élèves cherchent
		2 min	une élève corrige au tableau, sous les consignes de la prof qui pose des questions simples et isolées structurant la solution, et dicte la rédaction à l'élève.
		1 min	récapitulation, évocation d'autres solutions possibles
5 min 50	**application 2** : démontrer que deux triangles dont on connaît deux angles, (l'un donné numériquement, l'autre donné par une propriété géométrique), sont semblables même type d'application, utilisant les mêmes connaissances et aboutissant à la même propriété	2 min 40	les élèves cherchent, la prof se tait (ne s'adresse aux élèves qu'individuellement)
		1 min 50	donne des consignes de travail, puis envoie un élève au tableau et le guide même découpage que précédemment : méthode à suivre, traduction de l'angle droit, calcul du 3ème angle.
		0 min 35	laisse l'élève chercher après avoir structuré la méthode à l'aide de questions simples
		1 min 45	dicte la rédaction attendue donne le modèle à suivre : il faut écrire les angles homologues les uns en dessous des autres
7 min 10	**institutionnalisation** : déduit la propriété du cours : *pour démontrer la similitude il suffit de deux angles égaux*	0 min 50	les élèves complètent la feuille de cours
	démo de la propriété D'1	1 min 35	questions aux élèves qui ont pour seule initiative de choisir les angles
		2 min 45	envoie une élève au tableau qui répond à des questions simples découpant la tâche en sous-tâches isolées
		2 min	donne et commente la solution et conclut
7 min 45	**exercice 1** : citer des exemples de triangles semblables (triangles anciens, qui correspondent à la notion nouvelle) *lien ancien-nouveau*	1 min	mise en place (écrit la consigne et la rappelle oralement)
		1 min	recherche individuelle
		1 min	la prof pose des questions facilitant la recherche
		4 min 45	mise en commun et commentaires de la prof et des élèves sur les différentes réponses, (explications sur les différents triangles cités)

6 min 50	**exercice 2** : utilisation du théorème de l'angle inscrit ou angles opposés par le sommet pour démontrer deux égalités d'angles et en déduire la similitude (*application non isolée car mobilisation d'une connaissance ancienne*) rem : ici on peut utiliser les trois angles		mise en place, consigne : dessin de la figure, les élèves dessinent, la prof se tait ou intervient individuellement
45 min 30	**deuxième séance**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
0 min 50	**rappel** du cours précédent		questions aux élèves
8 min 10 total : 15 min	reprise de **l'exercice 2**	1 min 10	questions pour lancer l'activité : "qu'est ce qu'on vous demande de démontrer ?"
		7 min	un élève passe au tableau ; questions structurant la démonstration : choix des angles, recherche de l'arc intercepté, définition d'un angle inscrit, rappel du modèle, propriété des deux angles au lieu de trois (ici on peut faire sans) la prof dicte la solution au fur et à mesure que l'élève répond aux questions
9 min 20	**exercice 3** : **1)** étude d'une configuration de Thalès pour démontrer la similitude utiliser les droites parallèles pour démontrer l'égalité de deux angles correspondants et utilisation de l'angle commun pour démontrer la similitude *application simple mais non isolée* reconnaître la configuration de Thalès et appliquer la propriété aux longueurs *simple et isolé*	1 min	mise en route, la prof dessine la figure au tableau
		2 min 25	un élève au tableau consigne : extraire les hypothèses de l'énoncé l'élève hésite, la prof l'aide
		2 min 15	questions à l'élève structurant la méthode : choix de l'outil, démonstration d'égalité angles, rappel des angles définis par deux droites parallèles
		2 min 05	laisse écrire l'élève
		1 min 35	discussion de la solution avec la classe et correction par la prof
24 min 25	**2)** utilisation de rapports de longueurs pour démontrer la similitude démontrer l'isométrie des deux triangles ABD et BCD à l'aide des égalités des trois côtés (propriétés du parallélogramme) en déduire des égalités d'angles et donc la similitude des triangles AMN et CDB reprendre les égalités de rapport du 1) et remplacer les longueurs par des longueurs égales faire une conjecture	1 min 30	sans s'attarder sur Thalès, la prof envoie un autre élève au tableau, qui donne sa solution
		1 min 30	discussion de la solution et solution attendue par la prof
		1 min 25	questions isolées ("à trous") pour construire la démo de l'isométrie de ABD et BCD
		1 min 30	dicte la réponse, laisse l'élève écrire et commente
		5 min 40	discussion sur les sommets homologues et la notation appropriée questions simples structurant la méthode
		11 min 40	la prof fait le lien avec la question précédente et revient à la démonstration de la similitude grâce à une succession de nombreuses questions simples structurant la méthode, qu'elle récapitule régulièrement
		1 min 10	exercice inachevé à terminer à la maison la propriété II est admise et à démontrer en devoir (la démo est déjà un peu élaborée sur la feuille à l'aide de plusieurs questions)
4 min 10	**application** : (voir cours suivant)	4 min 10	mise en route / consigne : faire la figure

45 min 35	**troisième séance**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
13 min	**rappel de cours** : définition de triangles semblables et propriétés de la proportionnalité	2 min	questions aux élèves
		11 min	demande aux élèves d'exprimer la proportionnalité des longueurs par des égalités de rapports rappels et commentaires sur la proportionnalité (ancien) question sur les triangles suivant la valeur du rapport k rapport des aires
7 min 15	reprise de l'**application** 1) démonstration de la similitude de deux triangles à l'aide de deux paires de parallèles (les côtés du parallélogramme) définissant deux fois deux angles alternes internes deux fois la même application simple puis application de la définition de la similitude par deux angles	2 min 20	élève au tableau qui écrit les hypothèses et la conclusion du problème
		0 min 50	questions sur la méthode, l'élève écrit une première égalité d'angles et la prof désigne les angles égaux au tableau
		2 min	solution d'un autre élève, explication au tableau pour la classe puis la prof dicte à l'élève au tableau
		0 min 55	la prof récapitule, commente, propose une autre méthode
total : 11 min 25		1 min 10	rappel du problème des sommets homologues et corrigé de la solution
7 min 40	**2)** utilisation des rapports de longueurs des triangles semblables pour démontrer une égalité de produits de longueurs application semblables => égalité des rapports de longueurs, puis opération algébrique sur cette égalité application simple	1 min	mise en route : la prof dicte l'énoncé et demande "comment faire"
		5 min 20	questions structurant la méthode : rappelle la propriété, donne une consigne intermédiaire (écrire les égalités de rapport), fait préciser les sommets homologues
		1 min 20	la prof écrit la solution au tableau, commente, donne une autre méthode
9 min 25	**démo de la propriété III** (côtés proportionnels => triangles semblables) dont la figure était à faire à la maison, les étapes sont proposées sur la feuille - dessin au compas des triangles dont les trois côtés sont donnés - repérage des sommets homologues (le plus grand avec le plus grand, etc) - calcul des rapports	1 min	mise en route : la prof écrit l'énoncé, incite indirectement à prouver que les triangles sont semblables, et d'utiliser les longueurs des côtés
		1 min 15	questions structurant la méthode : suggère un calcul consigne : il faut justifier
		1 min	commentaires individuels
		3 min 20	aide au choix de la méthode et choix des côtés questions simples en désignant les éléments de la figure au tableau
		0 min 50	la prof écrit la solution au tableau
	- construction par report des longueurs - égalité des rapports et réciproque de Thalès - égalité de deux angles gr^ace aux droites parallèles (correspondants)	0 min 35	la prof suggère le lien entre les deux questions
		0 min 25	une élève lui dicte sa réponse, qu'elle commente
		1 min	la prof projette la figure à l'aide d'un rétroprojecteur questions d'élèves
0 min 50	**devoirs** : finir la démo du **III** réviser la proportionnalité		

46 min	**4ème séance (module en demi classe, travail en groupe de 4)**		
	exercice 1 - application simple de la similitude à l'aide de 2 angles égaux en mobilisant 2 fois le *théorème de l'angle inscrit* - application simple : *"triangles semblables => côtés proportionnels"* écriture des rapports et calcul algébrique	46 min	la prof passe dans les rangs et aide les groupes individuellement, parfois de manière audible pour le reste de la classe
	exercice 2 - application simple de la similitude à l'aide de 2 angles (*1 angle identique et 1 angle droit*) - application simple de la *propriété des aires de 2 triangles semblables"* puis calcul algébrique		ne semble pas avoir été abordé
	5ème séance(module en demi classe, travail en groupe de 4) (non filmée)		
	exercice 1 - application simple de la similitude à l'aide de 2 angles égaux à l'aide du *théorème de l'angle inscrit* et de la propriété *"triangle inscrit dans un demi-cercle => rectangle "* - application simple *: "triangles semblables => côtés proportionnels"* écriture des rapports et calcul algébrique		
	exercice 2 - utilisation du *théorème de l'angle inscrit* puis de la propriété *"isocèle + 1 angle de 60° => équilatéral"* - application non simple de l'isométrie à l'aide de 2 côtés égaux (question précédente) et 1 angle entre les deux (calculé par Chasles) - application simple *"isométrique => 3 côtés égaux"* et utilisation des égalités de longueurs		

CORRESPONDANCE AVEC Mme B.

QUESTIONS DU CHERCHEUR

- tout d'abord, j'aimerais savoir quel est le statut des devoirs à la maison? s'ils sont notés et s'ils sont corrigés en classe, car j'ai remarqué que la propriété suivante:"semblables => côtés proportionnels" ainsi que la variante "un angle de même mesure entre deux côtés proportionnels => semblable", qui, d'après ce que vous avez filmé, n'ont été vues qu'en devoir à la maison, ont tout de même été relativement bien utilisées en contrôle par certains élèves.

- j'aimerais aussi connaître les prénoms des élèves qui prenaient des cours
particuliers si vous vous souvenez desquels il s'agissait (au moins en tout cas les 3 fameux qui ne se sont malheureusement pas filmés!)

- sur les vidéos, la fin de votre feuille de cours n'a pas été vue avant le
contrôle (la remarque, les deux exercices du III, et la variante que les élèves ont justement utilisée en devoir et contrôle) finalement, a-t-elle été vue en classe hors vidéo ou encore à la maison ?

- je voudrais savoir si la 2ème feuille de module que vous m'avez fournie a été distribuée aux élèves, et si les exercices ont été faits et corrigés, en classe ou en demi-classe ou à la maison.

- est-ce que les modules 1 et 2 ont été vus par les deux moitiés de la classe ou bien y avait-il un énoncé différent pour chaque groupe ? (et dans ce cas comment se répartissaient les deux groupes ?)

- est-ce que le travail en module est toujours du même type ? est-ce que vous faites, lors de ces séances, travailler les élèves en petits groupes ou individuellement ? sans donner de correction générale au tableau ?

REPONSES DU PROFESSEUR

- Devoirs maison : ils sont non notés mais annotés. Ils sont corrigés en classe (je reprends les points les moins bien réussis) ou non mais les élèves ont une correction photocopiée détaillée. Cette correction peut être à la demande des élèves reprises en module ou bien en AIM (aide individualisée en maths)

- Prénom des élèves qui avaient des cours particuliers : Mathilde, Roxane, Audrey

- La 2ème feuille de module a été faite en module (demi-groupe) Les séances de module sont les mêmes pour les 2 groupes, mais on n'arrive pas forcément au même point à la fin des séances ce qui n'est pas toujours facile à gérer.
En module, on travaille soit en groupes, soit par table (donc par 2) soit collectivement (après une recherche individuelle de quelques minutes et correction au tableau par moi ou un élève soit on travaille sur ordinateur pour la géométrie dans l'espace (samao2 et interesp) et parfois (j'avais du le faire deux fois dans l'année) après avoir fait une figure sur l'ordinateur conjecturer...

- Je suis étonnée que je ne vous aie pas donné toutes les vidéos (soit que j'avais trop de problèmes avec, comme vous l'avez remarqué, la qualité des images n'est pas fameuse ou bien n'avais plus K7... J'ai oublié...)

- Je vous transmets le planning sur triangles semblables de l'an dernier (du moins ce que j'ai pu retirer de mon cahier de texte qui n'est pas bien tenu) J'espère que cela vous sera utile.
Je n'ai pas noté les exercices donnés d'un cours sur l'autre.
De plus des élèves sont partis en stage de ski au cours du chapitre triangles semblables

28/02	début du cours sur triangles semblables
01/03	une correction (de quoi ? je ne l'ai pas noté) Enoncé d'une propriété et démonstration collective (orale ????)
05/03	feuille d'orientation, démonstration écrite de quoi ??) Réciproque de la propriété
07/03	réciproque (fin variante admise (1angle égal compris entre 2 côtés...) Module sur triangles semblables
08/03	?????
14/03	module sur triangles semblables
19/3	retour de certains élèves partis en stage de ski : bilan par les élèves de la classe à leurs camarades sur triangles semblables (j'ai noté dans le cahier de texte les 2 questions suivantes : comment démontrer que deux triangles sont semblables ? Que peut-on déduire lorsqu'on sait que deux triangles sont semblables ? Sûrement que je les ai posés pour amorcer le bilan (directive !!!)
	+ devoir(s) maison

DECOUPAGE DES SEANCES DE Mme P.

50 min	**première séance**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
0 min 30	**Rappel** des activités du cours sur les triangles isométriques :		
17 min 40	**Activité d'introduction** : construire un triangle dont on connaît deux angles (60° et 45°) sans rapporteur.	5 min 50	le prof passe dans les rangs pendant que les élèves dessinent, et leur donne des conseils individuels
		1 min 10	le prof interroge un élève, qui lui dicte sa méthode de construction.
		1 min 40	mesure d'un côté et découpage du triangle obtenu
		1 min 10	le prof interroge les élèves sur la longueur qu'ils ont obtenue, puis "devine" la deuxième longueur
		0 min 50	le prof demande aux élèves de trouver la méthode utilisée une élève donne la réponse : les côtés sont proportionnels à ceux des triangles des autres élèves.
		0 min 50	le prof demande comment démontrer cette propriété une élève suggère Thalès
		0 min 30	le prof propose aux élèves de superposer leur triangle avec celui du voisin
		0 min 30	le prof fait remarquer le parallélisme des côtés, puis demande de le démontrer
		4 min 40	les élèves cherchent avec le prof la transformation qui va permettre de superposer les deux triangles (celui du tableau et celui d'un élève)
		0 min 30	le prof les aide à terminer la démonstration : à reconnaître une configuration de Thalès et à appliquer le théorème.
5 min 30	**définition :** deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure.	3 min 30	le prof fait des remarques sur "semblable", "similitude", "de même forme" avant d'écrire le titre du chapitre.
		2 min	"qu'est-ce qu'on va prendre comme définition ? de quoi on est parti ?" un élève propose : deux triangles avec deux angles égaux le prof demande comment est le troisième angle, puis écrit la définition.
2 min 20	**exemple :** quels sont les triangles semblables dans la configuration de Thalès		le prof dessine les angles égaux de même couleur, sauf l'angle au sommet qui est commun le prof demande pourquoi les angles de même couleur sont égaux
4 min 20	**propriété :** si deux triangles ont deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont semblables	1 min	"on va pas se fatiguer"
		1 min	**rappel** : écriture des homologues l'un en dessous de l'autre
		2 min 20	le prof fait formuler la propriété à un élève
19 min 40	**propriété :** lorsque deux triangles sont semblables leurs côtés sont proportionnels	2 min 30	le prof fait dessiner les deux triangles, puis demande aux élèves comment démontrer la proportionnalité
		1 min 30	le prof indique une partie de la solution : "il dit qu'il peut amener le petit triangle ici par une succession d'isométries. Conclusion, comment ils sont les deux petits ?"
		0 min 50	le prof conseille de coder la figure
		6 min 10	le prof demande de reporter les longueurs des côtés du petit triangle sur les côtés du grand le prof passe dans les rangs et encourage le travail des élèves en posant des questions sur ce qu'il faut faire
		8 min 40	le prof construit la démonstration avec l'aide des élèves ils utilisent la propriété "1 angle égal entre deux côtés resp. égaux => isométriques", puis déduisent l'égalité des 3èmes angles

	devoirs : calculer les longueurs exactes des côtés et l'aire du triangle découpé. terminer la démonstration du cours		
	fin de la séance		
	deuxième séance		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
3 min	élève interrogé au tableau sur le cours précédent		
14 min	**corrigé :** fin de la démonstration	3 min	le prof fait la figure au tableau et rappelle ce qui a été fait
		11 min	le prof construit la démonstration avec l'aide des élèves par des questions fermées aidant à structurer la méthode
20 min	**corrigé :** exercice à faire à la maison	4 min 40	le prof trace un tableau avec les longueurs des côtés trouvées par les élèves et demande comment le compléter
		4 min 30	discussion sur l'ordre de grandeur et la précision des mesures
		7 min 30	rappels sur les tableaux de proportionnalité et sur les arrondis
		3 min 20	remarques sur les coefficients d'agrandissement et de réduction, et sur les autres méthodes pour déterminer les longueurs des côtés d'un triangle (trigonométrie)
17 min 50	**exercice 1 :** soient le triangle ABC et le segment [A'B'] ; construire à la règle et au compas le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC.	1 min 10	le prof donne la consigne (avancer à son rythme) et rappelle la seule propriété du cours
		1 min	le prof laisse chercher les élèves en silence.
		0 min 50	indication sur la méthode et conseils
		1 min 40	le prof répond aux questions des élèves individuellement, puis dessine ma figure au tableau
			pause
		2 min	le prof suggère de coder la figure et donne une indication de méthode
		4 min 40	les élèves travaillent en silence, le prof passe dans les rangs et répond à leurs questions, les conseille
		5 min 20	le prof corrige l'exercice au tableau avec un élève
		1 min 10	le prof demande la solution d'un autre élève
29 min	**exercice 2 :** ABC triangle tel que AB = 42mm, AC = 28mm, BC = 36mm ; on note I le milieu de [AC] et D le point de [AB] tel que les angles AID et ABC soient égaux. Calculer AD et ID	0 min 50	les élèves donnent leur solution (ils ont cherché l'exercice 2 après l'exercice 1)
		0 min 40	indication de méthode (il faut trouver les triangles semblables : pas indiqué)
		2 min 40	rappel de la disposition des homologues
		3 min	silence
		2 min 20	remarque sur Thalès
		5 min 10	silence
		1 min 50	le prof rappel le cours
		2 min	le prof demande s'il y a des questions pour l'exercice 1
		3 min 10	le prof interroge un élève sur sa solution, qu'il écrit au tableau en la commentant
		3 min 10	le prof demande aux élèves de rappeler la démonstration de la propriété
		4 min 10	remarques sur la résolution numérique
12 min 50	**exercice 3 :** tracer un cercle de centre O et de rayon 5cm ; placer un point M à 3cm de O et tracer deux	2 min	consigne : prendre des cordes particulières
		3 min	le prof passe dans les rangs et répond aux questions
		3 min 40	indication de méthode : une élève suggère le théorème de l'angle inscrit, le prof demande aux élèves de retrouver ce théorème

	cordes quelconques passant par M notées [AB] et [CD]. 1) démontrer que MAxMB = MCxMD (on note p ce nombre) 2) calculer p, comment varie-t-il lorsque la distance OM varie ? **(préparé à la maison)**	4 min 10	le prof répond aux questions des élèves
			exercice à finir à la maison devoirs pour les séances suivantes : continuer la fiche d'exercices
	fin de la séance		
	troisième séance : module (1ère demi-classe)		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
13 min 50	**corrigé** de l'exercice 3 commencé en classe et à terminer à la maison	2 min	le prof envoie un élève au tableau. le prof fait la figure, que l'élève complète
		11 min 50	le prof aide l'élève à faire la démonstration, relançant son travail à l'aide de questions de plus en plus fermées sur la méthode
7 min 40	**exercice 4 :** (AM) et (Bz) sont perpendiculaires à (AB) ; AM = 16, AI = 2 et IB = 3 ; la perpendiculaire à (MI) en I coupe [Bz) ; calculer BP. **(préparé à la maison)**	2 min	le prof dessine la figure et un élève lui dicte sa solution
		5 min 40	codage de la figure et indications de méthode : le prof aide l'élève à corriger sa solution
29 min 20	**vrai-faux** 1) semblables => isométriques 2) isométriques => semblables 3) tous les triangles isocèles sont semblables 4) tous les triangles rectangles isocèles sont semblables 5) tous les triangles rectangles sont semblables 6) tous les triangles équilatéraux sont semblables 7) un triangle a un angle de 72° et un angle de 37°, un autre a un angle de 71° et un angle de 72° ; ces deux triangles sont semblables 8) deux triangles, EFG isocèle en F et PQR isocèle en Q, sont semblables ; de plus l'angle E vaut 70° ; alors l'angle Q vaut 50° 9) MNP et IJK sont semblables ; alors MN / IJ = MP / IK 10) RED et BUS sont semblables ; les angles D et B sont égaux, ainsi que les angles R et U ; alors DR / BU = RE / US	8 min 20	consignes et conseils
		17 min 40	les élèves cherchent en silence
		3 min 20	la correction se fait oralement ; les élèves interrogés donnent la réponse et sa justification
	fin de la séance		

	quatrième séance : aide individualisée élèves présents: anaïs, guillaume, louis-georges, mathieu, maxime, tiphaine, violaine		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
	organisation de la séance		le prof demande aux élèves sur quoi ils veulent travailler et les élèves énoncent leurs difficultés : "trouver les angles pour démontrer la similitude"
			le prof distribue une feuille d'exercice
	exercice AI1 : dans le triangle ABC, AB=3cm, BC=5cm, CA=6cm, le triangle EFG est semblable à ABC et on sait que les angles A et F sont égaux, ainsi que les angles B et E, et que EF=4.2cm. a) calculer le périmètre de EFG b) comparer EF / AB avec p'/p où p' est le périmètre de EFG et <p celui de ABC	1 min 40	le prof fait une figure au tableau
		8 min	le prof répond aux questions des élèves individuellement
		9 min	le prof commente l'exercice
		8 min	le prof demande si les élèves ont terminé puis résout l'exercice au tableau sous la dictée d'un élève le prof insiste sur la disposition des homologues le prof commente l'erreur de l'élève interrogé et demande l'avis des autres élèves
		1 min 50	réponse aux questions des élèves
	exercice AI2 : un triangle ABC est inscrit dans un cercle, la bissectrice de l'angle BAC coupe (BC) en D et le cercle en **I** a) démontrer que les triangles ABD et AIM sont semblables b) démontrer que ABxAM = ADxAI	3 min 10	les élèves cherchent en silence
		2 min 30	le prof fait la figure au tableau et met les angles égaux de la même couleur
		4 min 20	un élève est envoyé au tableau, il corrige avec l'aide du prof, qui insiste sur les angles de même couleur
		3 min	indications pour le travail donné à faire à la maison
	fin de la séance		
	cinquième séance		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
	exercice d'introduction (suite): trouver les hauteurs des triangles découpés et leur aire **(préparé à la maison)**	1 min	le prof fait la figure au tableau
		1 min 20	le prof interroge les élèves qui donnent leur solution
		1 min 10	indications sur la méthode
		3 min 20	commentaires sur une autre méthode possible (sans Pythagore) rappels sur les triangles équilatéraux
		9 min 40	le prof résout avec l'aide élèves en leur posant des questions sur ce qu'il faut faire et en leur rappelant la consigne
		14 min 10	indications pour la résolution algébrique et écriture de l'expression de h avec l'aide des élèves
		1 min	vérification numérique à l'aide du tableau de proportionnalité
		6 min 10	le prof relance les élèves sur le calcul de l'aire à l'aide de la hauteur et calcule avec eux
		2 min 40	remarques sur la proportionnalité et lien avec les coefficients d'agrandissement et de réduction
	corrigé de l'exercice 3 (fin)	2 min 20	le prof ré-explique pour les élèves qui n'ont pas compris le b)
		3 min 10	calculs numériques, commentaires sur la puissance d'un point par rapport à un cercle

			commentaires sur les fonctions
	exercice 5 : ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A 1) y a-t-il des triangles semblables parmi ABC, ABH et ACH ? 2) démontrer que AB² = BHxBC, AC² = CHxCB, AH² = HBxHC 3) applications : a) construire un segment de longueur √7 uniquement à la règle et au compas (utiliser la 3ème égalité du 2) b) donner une démonstration du théorème de Pythagore **(préparé à la maison)**	1 min 20	le prof trace la figure et rappelle l'énoncé
		1 min 30	le prof interroge un élève et écrit la solution avec son aide
		1 min 20	le prof insiste sur la disposition des homologues
			pause
		3 min 30	le prof interroge les élèves qui donnent la solution en utilisant "semblables => côtés proportionnels"
		10 min 20	le prof interroge les élèves pour la première application, trois d'entre eux donnent leur solution, les autres élèves donnent leur avis
		1 min 20	le prof corrige la deuxième application lui-même, avec l'aide d'un élève
		1 min 10	commentaires pour les élèves qui n'ont pas compris
	exercice 6 : ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que A'B' = 3AB, A'C' = 3AC, B'C' = 3BC 1) démontrer que ABC et A'B'C' sont semblables 2) la hauteur issue de A dans ABC coupe [BC] en H ; la hauteur issue de A' dans A'B'C' coupe [B'C'] en H'. Calculer A'H'/AH, comparer les aires des deux triangles. **(préparé à la maison)**	1 min 20	le prof suggère qu'il existe une réciproque à la propriété et demande aux élèves s'ils sont convaincus, puis leur propose de le prouver
		8 min 30	indications sur la méthode à travers des questions posées aux élèves résolution avec les élèves
		4 min 20	question d'un élève ; le prof recommence l'explication
		3 min 20	corrigé du 2) de la même façon
	propriété : lorsque deux triangles ont un angle commun et deux côtés proportionnels, alors ils sont semblables		
	fin de la séance		
	sixième séance : module (2ème demi-classe)		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
14 min 30	**ex 61 p 216 :** dans un repère orthonormal d'origine O, on donne A(0;6), B(-3;0), C(4;0) et D(0;2). 1) démontrer que les triangles OAC et OBD sont semblables 2) en déduire que (BD) et (AC) sont perpendiculaires **(préparé à la maison)**	0 min 50	rappel de la consigne "quel est le mot qui est écrit dans l'énoncé et qui nous permet d'être sûrs que c'est un angle droit ?"
		5 min 20	un élève donne sa solution (utilisation de Pythagore et P'1) avec l'aide du prof qui écrit au tableau, commente, explique pour les autres élèves ou les prend à parti l'élève interrogé répond à des questions très simples (calculs numériques, questions non mathématiques)
		1 min 30	le prof propose une autre méthode avec l'aide d'un élève (utilisation de la trigonométrie et de D'1)
		6 min 50	un élève donne sa solution pour le 2), le prof insiste sur le fait qu'il faut en général utiliser le 1) le prof demande de coder la figure le prof aide par des questions simples l'élève interrogé à résoudre l'exercice
17 min 50	**exercice 7 :** C et C' sont deux cercles de centre	1 min	le prof passe dans les rangs

50	deux cercles de centre respectif O et O' ; M est un point quelconque de C et M' un point de C' tel que (OM) et (OM') sont parallèles. La droite (MM') coupe (OO') en S et recoupe C et C' en P et P' respectivement. 1) démontrer que les triangles OMP et O'M'P' sont semblables 2) démontrer que les droites (OP) et (O'P') sont parallèles. **(préparé à la maison)** 3) si les rayons valent 2 et 5 cm, quel est le rapport des aires des triangles O'M'P' et OMP ?	3 min	le prof rappelle la consigne et interroge un élève dont la réponse n'est pas satisfaisante le prof prend les autres élèves à témoin
		5 min	le prof corrige le 1) avec l'aide d'un élève
		0 min 50	question d'élève
		2 min 30	le prof relance les élèves sur le 2) : "et alors qu'est-ce qu'il fallait en déduire ?" le prof donne une indication de méthode : "on n'a pas tout simplement un petit outil très simple qu'on a vu en 5ème ?" rappel sur les angles correspondants
		3 min 40	les élèves cherchent le 3) et l'exercice 1 de la 2ème fiche en silence le prof passe dans les rangs et répond individuellement aux élèves
		1 min	le prof suggère d'utiliser ce qui a été vu en cours la fois précédente
		0 min 50	le prof corrige le 3) avec un élève
15 min 10	**exercice 1 fiche 2** : tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD], placer le point E sur le segment [OA] tel que OE=1cm. La droite (CE) recoupe le cercle en F. On veut calculer l'aire du triangle CFD. 1) démontrer que les triangles COE et CFD sont semblables 2) a) calculer CF et FD, calculer l'aire de CFD b) autre méthode: calculer le rapport d'agrandissement qui fait passer du triangle COE au triangle CFD. Calculer l'aire du triangle COE, en déduire celle de CFD	10 min 10	les élèves cherchent en silence
		1 min 40	le prof interroge un élève rappel du théorème sur triangle rectangle et cercle le prof insiste sur l'écriture des homologues
		2 min	le prof corrige le 2) a) avec un élève en lui posant des questions simples
		1 min 20	le prof corrige le b) seul
	fin de la séance		

	septième séance : aide individualisée (non filmée) élèves présents: anaïs, jean-michel, , louis-georges, mathieu, maxime, violaine, yannick		
	huitième séance		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
17 min 40	**ex 65 p 216 :** xAy est un angle aigu, B et C sont deux points de [Ax) tels que AB=28mm et AC=75mm, D et E deux points de [Ay) tels que AD=21mm et AE=100mm 1) démontrer que ABD et ACE sont semblables 2) quel est le rapport de réduction? 3) est-il exact que l'aire de ABD = 8% de l'aire de ACE ? **(préparé à la maison)**	1 min 50	le prof fait la figure au tableau et interroge un élève
		0 min 50	le prof rappelle qu'il a demandé d'apprendre un théorème (P3) et demande aux élèves de le réciter
		3 min 20	le prof récapitule avec l'aide des élèves les trois méthodes disponibles pour démontrer la similitude rappel de P2 "il n'y a pas grand chose à savoir dans ce chapitre !"
		0 min 50	question d'élève
		0 min 40	retour à l'exercice, indication du prof : il faut se servir de P3
		0 min 50	aide du prof : détermination des homologues puis des rapports de longueurs
		1 min 40	consigne : calculer numériquement les rapports de longueurs "je ne veux pas que vous me disiez que les rapports sont égaux tant que vous ne les avez pas calculés" consigne : calculer le 3ème rapport "deux rapports égaux ça ne suffit pas"
		1 min 20	le prof explique à nouveau pour une élève le choix des homologues (par l'observation de la figure) "vu la figure, c'est probablement ça qui va marcher"
		0 min 30	le prof relance les élèves sur le 2) en relisant l'énoncé
		2 min 20	rappel sur les tableaux de proportionnalité et les pourcentages
		3 min 30	le prof corrige avec l'aide des élèves
6 min	**ex 77 p 217 :** ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC] démontrer que (aire ABH) / (aire AHC) = (tan C)² **(préparé à la maison)**	1 min 40	le prof interroge un élève
		1 min 10	le prof effectue la recherche des homologues
		1 min 10	l'élève donne sa solution (trigonométrie)
		2 min	question d'un élève : le prof reprend la démonstration de la similitude (avec la complémentarité des angles qu'il code en couleur sur la figure) "rouge plus blanc égal 90"
18 min 10	PB euclide : soit ABC un triangle, comment tracer M et N sur les segments [AB] et [AC] pour que (MN)//(BC) et que l'aire de AMN soit la moitié de celle de ABC ? (préparé à la maison)	1 min	"vous avez regardé dans le dictionnaire pour Euclide ?" le prof donne quelques faits historiques sur Euclide et ses travaux
		2 min 20	un élève explique comment il a trouvé k=√(1/2), le prof commente
		2 min 40	"comment je pourrais tracer des machins pour pouvoir tracer le point √2/2 ?" un élève propose une solution fausse (k=2), le prof commente
		2 min 20	le prof relance les élèves et donne la consigne : tracer le point M sur [AB] à l'équerre et au compas
		3 min 20	le prof écrit l'énoncé de l'exercice suivant au tableau puis donne une indication "le mot clef c'est cosinus"
		0 min 30	"√2 ça vous dit quelque chose quand même ?" "√2 fois quelque chose on l'a déjà fait"
		4 min 20	les élèves cherchent en silence
		7 min 40	le prof corrige avec les élèves en commentant leurs solutions, donnant ainsi deux méthodes de construction
	fin de la séance		

	neuvième séance (non filmée)	
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**
	exercice en plus : soit un triangle ABC tel que l'angle A mesure 60°, les hauteurs issues de B et C coupent les côtés en H et K, déterminer le rapport des aires de AKH et ABC indication donnée au cours précédent (cosinus)	
	exercice 2 fiche 2: ABCD étant un parallélogramme, une droite passant par A coupe (DB) en E, (DC) en F et (BC) en G. On sait que AE=5, EF=3, on cherche la longueur FG. 1) démontrer que les triangles ADE et BEG sont semblables ainsi que les triangles ADF et ABG. 2) calculer FG	
60 min	**contrôle**	
	fin de la séance	
	vacances scolaires	
	dixième séance : module (non filmé)	
	ex mod3: ABC équilatéral, construire M symétrique de A par rapport à C, P symétrique de B par rapport à A et N symétrique de C par rapport à B. 1) démontrer que APM, CMN ET NBP isométriques, en déduire ABC et MPN semblables. Quelle est la nature de MPN ? 2) démontrer que l'aire de MPN = 7x l'aire de ABC	
	ex sur les polygones de même forme	
	fin de la séance	
	onzième séance : aide individualisée (non filmée) élèves présents: alain, anaïs, jean-michel, louis-georges, marion, mathieu, violaine, yannick	
	exercice 1AI3 : ABC et DEF de même forme tels que ED/AB=EF/AC=DF/BC citer trois égalités d'angles	
	exercice 2 AI3: les côtés d'un triangle T ont pour longueurs 6, 8 et 9 cm, un triangle T' de même forme a des côtés de longueurs 9 et 13.5 cm. calculer la longueur du 3ème côté de T'	
	exercice 3 AI3: les côtés d'un triangle T ont pour longueurs 15, 18 et 21 cm, un triangle T' de même forme a un côté de longueur 15cm. quelles peuvent être les longueurs des autres côtés de T' ?	
	exercice 4 AI3 : a) utiliser les info de la figure pour montrer que IJL et JKL sont de même forme b) préciser les angles de même mesure de ces triangles	
	Fin de la séance	
	corrigé du devoir maison et du contrôle	
	contrôle 2	

ANALYSE DES ACTIVITES TACHE PAR TACHE CHEZ Mme P.

La couleur du numéro de l'exercice correspond à la difficulté a priori du niveau de mise en fonctionnement.

Intervention du professeur
Travail potentiel des élèves, NMF : choix et étapes
Travail potentiel des élèves, NMF : intermédiaires
Travail potentiel des élèves, NMF : reconnaissance
Un élève au tableau, correction, mise en commun

Intro

construire un triangle dont on connaît deux angles (60° et 45°) sans rapporteur.

calculer les longueurs exactes des côtés, la hauteur et l'aire du triangle obtenu.

5 min 50	Les élèves cherchent seuls
4 min	Un élève donne sa solution, le professeur commente et compare
0 min 30	Les élèves doivent trouver la méthode (= la proportionnalité)
0 min 20	Réponse d'un élève
0 min 50	Les élèves doivent démontrer la propriété
0 min 30	Méthode suggérée : Thalès et superposition
0 min	Les élèves cherchent la démonstration
0 min 30	Le professeur indique le parallélisme, à démontrer
5 min 10	Recherche commune de la démonstration

Démo

lorsque deux triangles sont semblables leurs côtés sont proportionnels

2 min 30	Recherche de la démonstration
1 min 30	Indication : transformations et codage de la figure
6 min 10	Recherche commune
8 min 40	Correction commune

Ex1

soient le triangle ABC et le segment [A'B'] ; construire à la règle et au compas le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC.

1 min 20	consignes : comment travailler aide méthode : rappel sur les outils disponibles
1 min 20	les élèves cherchent seuls
0 min 30	aide méthode: ne pas utiliser la propriété sur les longueurs
9 min 30	les élèves cherchent seuls (il ne reste qu'une seule méthode possible : l'utilisation de D1)
0 min 10	aide méthode: regardez dans votre cours
1 min	les élèves cherchent seuls
0 min 10	relance
1 min 50	les élèves cherchent seuls
0 min 10	relance
1 min 20	les élèves cherchent seuls
0 min 10	aide méthode: rappel de la propriété D'1 à utiliser
5 min 10	le prof interroge les élèves les élèves font des ASI avec le prof et copient

Ex2

ABC triangle tel que AB = 42mm, AC = 28mm, BC = 36mm ; on note I le milieu de [AC] et D le point de [AB] tel que les angles AID et ABC soient égaux. Calculer AD et ID

+	Recherche à la suite d'un autre exercice
0 min 50	Solution d'un élève
3 min 20	Indication : étape, et rappel de l'écriture des homologues
3 min	Recherche individuelle
2 min 20	Indication : Thalès
5 min	Recherche individuelle
1 min 50	Rappel de cours
8 min 20	Questions d'élèves, correction et synthèse communes
4 min 10	Commentaires sur la résolution

Ex3 (préparé à la maison)

tracer un cercle de centre O et de rayon 5cm ; placer un point M à 3cm de O et tracer deux cordes quelconques passant par M notées [AB] et [CD].

1) démontrer que MA x MB = MC x MD (on note p ce nombre)

2) calculer p, comment varie-t-il lorsque la distance OM varie ?

2 min	Consigne : choix de la figure
3 min	Recherche individuelle
3 min 40	Indication : méthode, choix de la propriété
4 min 10	Questions d'élèves
A terminer à la maison, repris en module	
13 min 50	Correction commune

Ex4 (module, préparé à la maison)

exercice 4 :

(AM) et (Bz) sont perpendiculaires à (AB) ; AM = 1.6, AI = 2 et IB = 3 ; la perpendiculaire à (MI) en I coupe [Bz) ; calculer BP.

2 min	Réponse d'élève
5 min 40	Correction commune

Vrai/faux (module)

1) semblables => isométriques *2) isométriques => semblables* *3) tous les triangles isocèles sont semblables* *4) tous les triangles rectangles isocèles sont semblables* *5) tous les triangles rectangles sont semblables* *6) tous les triangles équilatéraux sont semblables* *7) un triangle a un angle de 72° et un angle de 37°, un autre a un angle de 71° et un angle de 72° ; ces deux triangles sont semblables* *8) deux triangles, EFG isocèle en F et PQR isocèle en Q, sont semblables ; de plus l'angle E vaut 70° ; alors l'angle Q vaut 50°* *9) MNP et IJK sont semblables ; alors MN / IJ = MP / IK* *10) RED et BUS sont semblables ; les angles D et B sont égaux, ainsi que les angles R et U ; alors DR / BU = RE / US*

17 min 40	Recherche individuelle
3 min 20	Correction commune

AI1 (aide individualisée)

dans le triangle ABC, AB=3cm, BC=5cm, CA=6cm, le triangle EFG est semblable à ABC et on sait que les angles A et F sont égaux, ainsi que les angles B et E, et que EF=4.2cm. *a) calculer le périmètre de EFG* *b) comparer EF / AB avec p'/p où p' est le périmètre de EFG et p celui de ABC*

1 min 40	Recherche individuelle
17 min	Questions d'élèves et commentaires
8 min	Résolution commune
1 min 50	Questions d'élèves

AI2 (aide individualisée)

un triangle ABC est inscrit dans un cercle, la bissectrice de l'angle BAC coupe (BC) en D et le cercle en M *a) démontrer que les triangles ABD et ACM sont semblables* *b) démontrer que AB x AM = AD x AC*

3 min 10	Recherche individuelle
2 min 30	Indication : intermédiaire
4 min 20	Correction commune

Intro (suite)

Trouver les hauteurs des triangles de l'activité d'introduction et leur aire

1 min	Recherche individuelle
1 min 20	Réponses d'élèves
4 min 30	Indication : méthode, commentaires et rappels
9 min 40	Correction commune
14 min 10	Indication : algèbre
7 min 10	Correction commune
2 min 40	Commentaires

Ex5 (préparé à la maison)

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A *1) y a-t-il des triangles semblables parmi ABC, ABH et ACH ?* *2) démontrer que $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times CB$, $AH^2 = HB \times HC$* *3) applications : construire un segment de longueur $\sqrt{7}$ uniquement à la règle et au compas (utiliser la $3^{ème}$ égalité du 2)* *donner une démonstration du théorème de Pythagore*

1 min 20	Rappel de la consigne
1 min 30	Réponse d'élève
1 min 20	Rappel sur l'écriture des homologues
13 min 50	Réponses d'élèves et correction commune
2 min 30	Conclusion et commentaires

Ex6 (préparé à la maison)

ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que A'B' = 3AB, A'C' = 3AC, B'C' = 3BC

1) démontrer que ABC et A'B'C' sont semblables

2) la hauteur issue de A dans ABC coupe [BC] en H ; la hauteur issue de A' dans A'B'C' coupe [B'C'] en H'. Calculer A'H'/AH, comparer les aires des deux triangles.

1 min 20	Rappel consigne et méthode
16 min 10	Résolution commune

Ex61 (module, préparé à la maison)

dans un repère orthonormal d'origine O, on donne A(0;6), B(-3;0), C(4;0) et D(0;2).

1) démontrer que les triangles OAC et OBD sont semblables

2) en déduire que (BD) et (AC) sont perpendiculaires

0 min 50	Rappel de la consigne indication : reconnaissance de certaines modalités
8 min 10	Solution d'un élève, correction commune, autres méthodes, ASI

Ex7 (module, préparé à la maison)

C et C' sont deux cercles de centre respectif O et O' ; M est un point quelconque de C et M' un point de C' tel que (OM) et (OM') sont parallèles. La droite (MM') coupe (OO') en S et recoupe C et C' en P et P' respectivement.

1) démontrer que les triangles OMP et O'M'P' sont semblables

2) démontrer que les droites (OP) et (O'P') sont parallèles.

1 min ou +	Recherche individuelle
	Rappel de consigne, réponse d'élève fausse
	Correction commune et questions
2 min 30	Relance et indication pour le 2) : méthode, rappels
3 min 40	Recherche individuelle
1 min	Indication : méthode, choix de la propriété
0 min 50	Correction commune

Ex1(2) (module)

tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD], placer le point E sur le segment [OA] tel que OE=1cm. La droite (CE) recoupe le cercle en F. On veut calculer l'aire du triangle CFD.

1) démontrer que les triangles COE et CFD sont semblables

2) a) calculer CF et FD, calculer l'aire de CFD

b) autre méthode: calculer le rapport d'agrandissement qui fait passer du triangle COE au triangle CFD. Calculer l'aire du triangle COE, en déduire celle de CFD

10 min 10	Recherche individuelle
1 min 40	Réponse d'élève, rappels et écriture des homologues
2 min	Correction commune
1 min 20	Correction de la fin par le professeur seul

Ex65 (préparé à la maison)

xAy est un angle aigu, B et C sont deux points de [Ax) tels que AB = 28 mm et AC = 75 mm, D et E deux points de [Ay) tels que AD = 21 mm et AE = 100 mm

1) démontrer que ABD et ACE sont semblables

2) quel est le rapport de réduction?

3) est-il exact que l'aire de ABD = 8% de l'aire de ACE ?

1 min 50	Réponse d'élève
0 min 50	Rappel de cours
4 min 10	Synthèse commune et question d'élève
0 min 40	Indication : méthode, choix de la propriété
0 min 50	Indication : reconnaissance des modalités (homologues) et méthode
0 min 40	Consigne : calculs numériques
1 min	Les élèves effectuent les calculs numériques
4 min 10	Explication et relance, rappels
3 min 30	Correction commune

Ex77 (préparé à la maison)

ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC]

démontrer que (aire ABH) / (aire AHC) = (tan C)²

1 min 40	Réponse d'élève
1 min 10	Indication : recherche des homologues
1 min 10	Réponse d'élève
2 min	Correction par le professeur

PB (préparé à la maison)

soit ABC un triangle, comment tracer M et N sur les segments [AB] et [AC] pour que (MN)//(BC) et que l'aire de AMN soit la moitié de celle de ABC ?

1 min	Remarques sur Euclide
5 min	Réponse d'élève et commentaires
2 min 20	Relance et rappel de la consigne
3 min 20	Recherche individuelle
0 min 30	Indication : méthode, choix de la propriété ancienne
4 min 20	Recherche individuelle
7 min 40	Correction commune

(Les autres exercices traités en classe n'ont pas été filmés, et ne sont donc pas analysés ici.)

QUESTIONS DU CHERCHEUR :

- j'aimerais tout d'abord savoir comment étaient organisées les demi-classes pour les modules
y avait-il une différence de niveau entre les deux groupes ?

- serait-il possible de connaître la chronologie des séances après les vacances de février ?
dans quel ordre avaient eu lieu :
la dernière aide individualisée, la correction du devoir et le deuxième contrôle ?

- au sujet de l'aide individualisée du 9/02 je n'ai pas d'information,
mais elle est mentionnée sur l'une des vidéos,(lorsque vous faites la liste des élèves qui y assisteront),
en avez-vous encore l'énoncé ?

- la propriété " la médiane issue de l'angle droit vaut la moitié de l'hypoténuse"
avait-elle été revue en classe ? durant le chapitre des triangles isométriques (ou semblables) ?
(elle intervient dans un contrôle et de nombreux élèves l'utilisent sans problème)

- que sont devenus les élèves de cette classe ?
quelle était leur moyenne en maths ?
lesquels sont passés en S ?

REPONSES DU PROFESSEUR :

- à cause de l'emploi du temps, les latinistes (10 élèves) devaient venir dans le 1er groupe, complété par 8 élèves qui ont accepté de commencer à 8h chaque lundi, donc en théorie pas de différence de niveau entre les deux groupes, mais en réalité le groupe des latinistes s'est avéré être de meilleur niveau

- d'après ce qu'il me reste de documents, la dernière AI (aide individualisée) a eu lieu le 01/03, la correction du devoir maison le 04/03 et le contrôle le 12/03 mais je ne suis pas très sûre pour l'AI (était-ce le 01/03 ou le 08/03 ?)

- il faudrait que je vois la vidéo pour l'AI du 9/02, mais je crois que c'est une AI sur les fonctions car j'alternais géométrie et algèbre-analyse chaque semaine en AI.

- la propriété "médiane = ½ hypoténuse" a été revue en octobre (chapitre 0 = révisions à travers des exercices variés de la géométrie au collège) et réutilisée plusieurs fois par la suite, donc familière aux élèves.

- je vous joint le bilan de la classe avec leurs moyennes (maths en 1ère colonne) et leur orientation, c'était une très bonne classe puisque 26 élèves sont en 1ère S.

DECOUPAGE DES SEANCES DE Mme F.

42 min	**premier cours**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
10 min 30	**fin** du cours sur les triangles isométriques		correction du dernier contrôle, portant sur les triangles isométriques et sur les fonctions, le prof corrige au tableau
2 min	**Début** du nouveau cours sur les triangles semblables **définition :** deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure.		le prof écrit la définition au tableau
4 min 30	**questions** posées oralement aux élèves **:** - est-ce que deux triangles isométriques sont semblables ? - est-ce que la réciproque est vraie ?	2 min	réponses correctes des élèves
	- donnez des exemples	2 min 30	réponses des élèves : **-** triangles rectangles isocèles - triangles équilatéraux
			le prof écrit les exemples donnés par les élèves au tableau
8 min	**propriété :** si deux triangles ont deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont semblables.	3 min	introduction : le prof essaie de faire trouver les propriétés aux élèves "si deux triangles sont semblables, est-ce que vous pouvez me faire une phrase avec "angles", et une autre avec "côtés" ?"
		2 min	le prof donne des indications sur la méthode aux élèves : "est-ce que vous pouvez me trouver un théorème ?"
		1 min	réponses des élèves, validées par le prof
		2 min	le prof écrit la propriété au tableau et sa démonstration
9 min 30	**exercice 1 :** ABC est un triangle inscrit dans un cercle, D appartient à l'arc BC, (AD) coupe (BC) en E. Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables.	0 min 30	le prof écrit l'énoncé au tableau
		1 min	indication sur ce qu'il faut faire : "attention, je ne mets pas les homologues en face, une des difficultés sera de retrouver quels sont les sommets homologues"
		0 min 30	indication sur la méthode : "j'avais fait réviser pour aujourd'hui certaines propriétés des angles, laquelle vous allez pouvoir utiliser ?"
		0 min 30	une élève donne une solution que le prof écrit au tableau, après l'avoir corrigée (paire d'angles opposés par le sommet)
		1 min	indication sur la méthode : le prof désigne les deux autres angles homologues
		0 min 30	une élève donne une solution (angles inscrits)
		1 min 30	le prof fait retrouver le théorème aux élèves : "qu'est-ce que c'est qu'un angle inscrit ? c'est un angle dont le s... appartient au... ?" (question fermée) puis elle énonce les théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre.
		3 min	un élève donne la solution, le prof l'écrit au tableau en commentant
		1 min	silence les élèves recopient le prof insiste sur l'écriture des homologues dans le bon ordre
1 min	**propriété**		le prof annonce la proportionnalité des côtés oralement
3 min 30	**exercice 2 :** ABC est un	0 min 30	le prof fait la figure au tableau en silence

	triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. Montrer que les triangles ABC et AHB sont semblables. Citer un 3ème triangle semblable aux 2 précédents.	2 min	indications sur ce qu'il faut faire : "qu'est-ce qu'ils ont déjà en commun ?", "donc il suffit de prouver... ?" les élèves répondent aux questions posées
		1 min	le prof écrit la solution au tableau et rappelle la 2ème question, puis écrit la réponse d'un élève
3 min	**fin de la séance**		le prof donne des exercices à faire pour la prochaine séance de module (triangles isométriques)
49 min 30	**deuxième cours (séance de module en demi-classe)**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
39 min	exercices sur les triangles isométriques		les élèves volontaires vont au tableau pour corriger les exercices qu'ils ont préparés chez eux
	rappels de cours	1 min	le prof demande la définition des triangles semblables, qui est donnée par un élève
		1 min	le prof énumère les différentes égalités d'angles rappelées en cours
		1 min	le prof rappelle aux élèves la proportionnalités des côtés des triangles semblables "certains avaient déjà un peu deviné que lorsque deux triangles sont semblables leurs côtés sont... ?"
7 min 30	**propriété :** lorsque deux triangles sont semblables leurs côtés sont proportionnels	2 min	le prof fait une figure au tableau, superposant les deux triangles semblables en configuration de Thalès
		1 min	questions aux élèves : "est-ce que la figure vous fait penser à une configuration connue ?" "dans quel cas est-ce qu'on pourra utiliser Thalès ?"
		1 min 30	rappel sur les angles délimités par deux parallèles et une sécante : "le théorème dit que si les droites sont... alors les angles sont... ?"
		3 min	un élève dicte la démonstration (angles correspondants, puis rapports de Thalès)
1 min	**réciproque**		le prof annonce que la réciproque sera admise
2 min	**propriété :** lorsque deux triangles ont un angle commun et deux côtés proportionnels, alors ils sont semblables	0 min 30	le prof essaie de faire deviner la propriété aux élèves
		0 min 30	le prof énonce la propriété
		1 min	le prof définit le rapport de similitude et rappelle la notion d'agrandissement - réduction vue en 4ème, ainsi que le rapport des aires et des volumes
	fin de la séance		
49 min	**troisième cours**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**	**découpage du déroulement**	
38 min	entrée en classe et problèmes administratifs		
	cours d'analyse		
11 min	**rappels**	0 min 30	le prof rappelle les conclusions obtenues à la fin du module
		3 min 30	le prof demande aux élèves de retrouver la démonstration et la reconstruit avec eux en leur laissant des phrases à compléter
		5 min	le prof note la propriété de proportionnalité des côtés, sa réciproque et la définition de rapport de similitude au tableau, ainsi que le rapport des aires et des volumes, toujours en faisant participer les élèves par des questions fermées ne portant pas sur les mathématiques
		1 min	le prof rappelle la propriété "deux triangles avec un angle commun et deux côtés proportionnels sont semblables", la note et répond aux questions d'un élève
		1 min	le prof insiste sur l'écriture des homologues

	fin de la séance		
30 min	**quatrième cours (non filmé)**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
30 min	**exercice 3 :** soit une triangle ABC, tel que AB = 2.8 cm, BC = 3.9 cm, AC = 4.2 cm; I milieu de [AB]; angle AID = angle ACB 1) calculer AD et ID 2) évaluer le rapport : (aire de AID) / (aire de ABC)		la prof est au tableau et écrit la solution avec la participation des élèves
40 min 30	**cinquième cours (2 modules en demi-classe) : 1er groupe**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
			les exercices étaient donnés à préparer à la maison les élèves se portent volontaires pour corriger au tableau
20 min	**exercice 4 :** (Pythagore 2nde, 42 p 190) ABCD parallélogramme, M appartient à (BC), (AM) coupe (DC) en N. a) montrer que ABM et CMN sont semblables, b) montrer que ADN et CMN sont semblables c) en déduire que AB x DA est constant	6 min	problème de figure : l'élève au tableau n'a pas la même que les autres le prof dessine la figure
		4 min	une élève dicte la solution au prof qui écrit au tableau (angles alternes internes, angles opposés par le sommet)
		3 min	le prof recommence avec les deux autres triangles, sous la dictée d'un élève, en effaçant ce qui vient d'être fait pour le remplacer au fur et à mesure par les nouvelles lettres (angles correspondants et angle commun)
		2 min	"donc tu peux en déduire que les triangles... ?" par transitivité, similitude de ABM et NDA
		1 min	sous la dictée de l'élève : proportionnalité des côtés et écriture des rapports
		2 min	indications sur la méthode : "quel est le rapport qui ne sert à rien ici ?", "qu'est-ce qu'on fait ?", "alors AB et DA c'est quoi ?"
		2 min	question d'un élève
3 min 30	**exercice 5 :** (Pythagore 2nde, 47 p 190) AB et DC sont deux cordes d'un même cercle sécantes en I montrer que IB x IA = ID x IC	0 min 30	indication sur ce qu'il faut faire : "on va chercher à montrer que ces deux triangles sont... ?"
		1 min	une élève donne la solution (angles opposés par le sommet et angles inscrits, puis côtés homologues proportionnels, rapports et produits en croix)
		2 min	indications : "qu'est-ce qu'on a trouvé en fait ?", le prof pose des questions fermées aux élèves pour leur faire énoncer la conclusion
5 min	**exercice 6 :** (Pythagore 2nde, 48 p 190) OKN triangle rectangle en K, M appartient à [OK], H le projeté orthogonal de M sur (ON) montrer que OHM et OKN sont semblables en déduire que ON x OH = OM x OK	3 min	l'élève écrit au tableau (angle commun et angle droit)
		2 min	le prof insiste sur l'écriture des homologues
12 min	**exercice 7 :** (Pythagore 2nde, 51 p 190)	1 min	l'élève écrit sous la dictée du prof (angles droits et angle commun)

	ABC triangle rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A a) montrer que ABC et HBA sont semblables b) en déduire que $AB^2 = BC \times HB$ c) en déduire que $CA^2 = CB \times CH$ d) montrer que HBA et HAC sont semblables en déduire que $HA^2 = HB \times HC$	1 min	indications sur la méthode : "donc écris directement les rapports", "ré-écris ceux dont tu te sers"
		1 min	le prof écrit la solution du c) par dessus les premières questions, en effaçant progressivement
		5 min	l'élève écrit sous la dictée du prof indications de méthode : "donc qu'est-ce que tu peux en déduire ?" "quels rapports tu as sélectionné ?"
		4 min	le prof demande s'il y a d'autres méthodes possibles un élève propose de passer par les aires, un autre de réutiliser les premières égalités trouvées.
	fin de la séance		
45 min	**cinquième cours (2 modules en demi-classe) : 2ème groupe**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
			les exercices traités sont les mêmes, mais c'est le prof qui écrit la correction au tableau
21 min	**exercice 4 :** (Pythagore 2nde, 42 p 190) ABCD parallélogramme, M appartient à (BC), (AM) coupa (DC) en N. montrer que ABM et CMN sont semblables, montrer que ADN et CMN sont semblables en déduire que AB x DA est constant	9 min	le prof commente le problème de figure le prof dessine la figure et commente l'énoncé, un élève donne sa solution (thalès), le prof la commente puis demande une solution plus courte, un élève donne la même méthode que dans le 1er module
		3 min	un élève donne sa solution pour la question b)
		4 min	indications sur la méthode : "quels sont les homologues ?" "et donc on justifie en disant... qu'ils sont tous les deux semblables au triangle... ?"
		5 min	un élève donne sa solution pas d'élève volontaire pour la conclusion le prof termine l'exercice en commentant
8 min	**exercice 5 :** (Pythagore 2nde, 47 p 190) AB et DC sont deux cordes d'un même cercle sécantes en I montrer que BID et CIA sont semblables	1 min	le prof dessine la figure et commente l'énoncé un élève propose une solution fausse
		4 min	le prof corrige l'erreur l'élève continue, le prof écrit au tableau le prof insiste sur la disposition des homologues mêmes correction et rédaction que pour le premier module
		3 min	autre méthode proposée par un élève
4 min	**exercice 6 :** (Pythagore 2nde, 48 p 190) OKN triangle rectangle en K, M appartient à [OK], H le projeté orthogonal de M sur (ON) montrer que OHM et OKN sont semblables en déduire que $ON \times OH = OM \times OK$		le prof trace la figure au tableau un élève lui dicte sa solution même correction que pour le premier module

12 min	**exercice 7 :** (Pythagore 2nde, 51 p 190) ABC triangle rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A a) montrer que ABC et HBA sont semblables b) en déduire que $AB^2 = BC \times HB$ c) en déduire que $CA^2 = CB \times CH$ d) montrer que HBA et HAC sont semblables en déduire que $HA^2 = HB \times HC$		un élève dicte sa solution au prof qui l'écrit au tableau le prof fait participer les autres élèves même correction que pour le premier module, y compris les autres méthodes possibles, proposées par le prof cette fois-ci
	fin de la séance		
112 min	**sixième cours (8 élèves absents)**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
75 min	exercices d'analyse		les numéros des exercices sont écrits au tableau, les élèves cherchent en silence, la correction se fait au fur et à mesure
jusqu'à 37 min	**exercice 8 :** (Pythagore 2nde, 25 p 188) ABC et A'B'C' sont semblables, H (resp. H') pied de la hauteur issue de A (resp. A'), on pose B'C'/BC = k. a) montrer que ABH et A'B'H' sont semblables b) déterminer le rapport A'H'/AH	31 min	les élèves cherchent en silence trois exercices ont été donnés en même temps, chacun avance à son rythme, il reste encore à corriger deux exercices d'analyse
		5 min	une élève est envoyée au tableau, elle écrit sa solution sans l'aide du prof (angles homologues et angles droits, puis proportionnalité)
		2 min	le prof commente la solution de l'élève
	fin de la séance		
45 min	**septième cours (8 élèves absents)**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
			reprise des exercices du cours précédent, à terminer à la maison
6 min	**exercice 9 :** (Pythagore 2nde, 27 p 188) ABC et A'B'C' sont semblables, la bissectrice de CAB (resp.C'A'B') est sécante à [BC] (resp. [B'C']) en D (resp. D') montrer que A'D'/AD = A'B'/AB	6 min	le prof envoie un élève au tableau et le laisse écrire sa solution en intervenant très peu (égalités des moitiés d'angles homologues et angle commun, puis côtés proportionnels)
11 min	**exercice 10 :** (Pythagore 2nde, 26 p	4 min	un élève se porte volontaire et passe au tableau, P lit l'énoncé puis laisse faire l'élève (longueurs proportionnelles et angles homologues)

	188) ABC et A'B'C' sont semblables, I (resp.I') est le milieu de [BC] (resp. [B'C']) montrer que A'I'/AI = A'B'/AB	7 min	le prof corrige le travail de l'élève et reprend la direction de la correction en commentant les méthodes l'élève écrit sous la dictée
28 min	**exercice d'analyse**		
	Vacances scolaires		
47 min	**huitième cours**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
27 min	exercices d'analyse		
10 min	**exercice 11 :** (Pythagore 2^{nde}, 32 p 188) A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC ; G est le point d'intersection des médianes (BB') et (CC'). a) montrer par des considérations angulaires que GBC et GB'C' sont semblables b) montrer GB'/GB = GC'/GC = 1/2 exercice à faire à la maison		un élève écrit sa solution au tableau (angles opposés par le sommet, angles alternes-internes grâce au théorème des milieux) le prof demande à l'élève d'utiliser la proportionnalité des côtés plutôt que la position du centre de gravité l'élève écrit les rapports de longueurs et conclut
4 min	**exercice 12 :** (Pythagore 2^{nde}, 33 p 189) E appartient au coté [BC] du triangle ABC tel que les angles ABC et CAE aient même mesure a) montrer que ABC et AEC sont semblables b) montrer que AB x AC = BC x AE exercice à faire à la maison	4 min	le prof envoie un élève au tableau pour écrire sa solution (2 angles égaux puis rapports de longueurs)
6 min	**exercice 13 :** (Pythagore 2^{nde}, 30 p	3 min	le prof propose de faire oralement cet exercice les élèves cherchent en silence

	188) A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC a) rappeler le théorème des milieux b) montrer que A'B'C' sont semblables c) en déduire que l'aire de A'B'C' = ¼ de l'aire de ABC	3 min	un élève donne sa solution (angles), le prof demande une autre méthode d'autres élèves donnent leurs solutions (théorème des milieux) le prof aide un élève à finir l'exercice oralement
	fin de la séance		
44 min	**neuvième cours (module en demi-classe) : 1er groupe**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
29 min	**exercice 14 :** (Pythagore 2nde, 53 p 191) A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon R, (AB) et (CD) se coupent en M, (MO) recoupe le cercle en E et F a) montrer AMD et CMB sont semblables, en déduire que MA x MB = MC x MD b) montrer que ME x MF = MO²-OE² c) on pose OM = d, déduire que MA x MB ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à d²-R² d) (MT) tangente en T au cercle, montrer que MA x MB = MT² e) utiliser l'égalité précédente pour prouver que MAT et MTB sont semblables f) montrer que les angles ABT et ATM ont même mesure	4 min	un élève écrit sa solution au tableau pour a) (angles inscrits et angle commun, proportionnalité des homologues) le prof commente la solution
		4 min	l'élève continue et écrit sa solution pour b) (algèbre sur les longueurs) le prof explique pour les élèves qui n'ont pas compris
		4 min	le prof écrit au tableau en commentant la solution du c)
		4 min	l'élève écrit, aidé par le prof, la solution du d) (théorème de Pythagore)
		2 min	le prof questionne les élèves sur le sens du résultat les élèves répondent
		2 min	le prof commente la dernière question et donne une indication sur la méthode : "nous allons utiliser un critère que nous n'avons pas trop utilisé jusque-là, on est habitué à écrire des rapports puis des produits en croix, là on va faire le contraire" le prof écrit la solution
		4 min	le prof rappelle les critères de similitude, et précise celui qui va être utilisé ici (angle commun et deux côtés proportionnels), puis dicte la solution à l'élève au tableau
		5 min	débat avec les autres élèves : erreur au tableau, corrigée par le prof
15 min	exercices d'analyse		
	fin de la séance		
35 min	**neuvième cours (module en demi-classe) : 2ème groupe**		
durée	**objectif visé et tâche prescrite**		**découpage du déroulement**
18 min	**exercice 14 :** (pythagore 2nde, 53 p 191) A, B, C et D appartiennent au	4 min	le prof fait la figure au tableau et la commente le prof écrit l'énoncé au tableau un élève dicte sa solution au prof qui l'écrit au tableau, relançant l'élève par moment, insistant sur la position des homologues

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="6">appartiennent au cercle de centre O et de rayon R, (AB) et (CD) se coupent en M, (MO) recoupe le cercle en E et F
a) montrer AMD et CMB sont semblables, en déduire que MAxMB = MCxMD
b) montrer que $MExMF = MO^2-OE^2$
c) on pose OM = d, déduire que MAxMB ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à d^2-R^2
d) (MT) tangente en T au cercle, montrer que $MAxMB = MT^2$
e) utiliser l'égalité précédente pour prouver que MAT et MTB sont semblables
f) montrer que les angles ABT et ATM ont même mesure</td><td>2 min</td><td>l'élève se trompe, le prof le guide pour qu'il corrige sa réponse, par des questions fermées</td></tr>
<tr><td>2 min</td><td>le prof interroge un autre élève pour la question c)
le prof aide l'élève en lui posant des questions</td></tr>
<tr><td>3 min</td><td>un autre élève dicte sa solution pour la question d), aidé par le prof</td></tr>
<tr><td>1 min</td><td>le prof fait réfléchir les élèves sur le sens du résultat</td></tr>
<tr><td>4 min</td><td>un élève dicte sa solution pour la question e), aidé par le prof</td></tr>
<tr><td>2 min</td><td>le prof résout la dernière question en la commentant, puis commente l'exercice</td></tr>
<tr><td>20 min</td><td>exercices d'analyse</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>fin de la séance</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17 min</td><td colspan="3">dixième cours</td></tr>
<tr><td>durée</td><td>objectif visé et tâche prescrite</td><td></td><td>découpage du déroulement</td></tr>
<tr><td></td><td>corrigé du contrôle sur les triangles semblables</td><td></td><td>le prof corrige les deux exercices au tableau et commente les erreurs des élèves</td></tr>
</table>

ANALYSE DES ACTIVITES TACHE PAR TACHE CHEZ Mme F.

La couleur du numéro de l'exercice correspond à la difficulté a priori du niveau de mise en fonctionnement.

Intervention du professeur
Travail potentiel des élèves, NMF : choix et étapes
Travail potentiel des élèves, NMF : intermédiaires
Travail potentiel des élèves, NMF : reconnaissance
Un élève au tableau, correction, mise en commun

Ex1

Montrer que les triangles DBE et CAE sont semblables

0 min 30	Ecriture de l'énoncé au tableau calcul d'intermédiaires (angles égaux), mélange avec l'ancien (angle inscrit)
0 min30	indication: il faut repérer les homologues
0 min30	Reconnaissance des modalités (repérage) et mélange avec l'ancien
0 min30	Indication : mélange avec l'ancien
0 min30	Un élève donne un paire d'homologues
1 min	Indication : le professeur donne l'autre paire d'homologues
0 min 30	Un élève donne l'ancien
1 min 30	Travail de l'ancien avec le professeur
4 min	Correction, les élèves copient

Ex2

ABC est un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. Montrer que les triangles ABC et AHB sont semblables. Citer un 3ème triangle semblable aux 2 précédents

0 min 30	Ecriture de l'énoncé au tableau Reconnaissance des modalités
0 min 30	Indications : méthode
1 min 30	Les élèves répondent à des questions simples
1 min	Correction par le professeur

Ex 3 (non filmé)

Ex4 (module, préparé à la maison)

ABCD parallélogramme, M appartient à (BC), (AM) coupe (DC) en N.

a) montrer que ABM et CMN sont semblables,

b) montrer que ADN et CMN sont semblables

c) en déduire que MB x ND est constant

Groupe 1

6 min	Le professeur dessine la figure et commente
10 min	Réponse d'élèves et ASI
2 min	Commentaires et questions d'élèves

Groupe 2

2 min	Le professeur dessine la figure et commente
9 min	Réponse d'élèves
4 min	Indication : méthode (homologues)
5 min	Correction par le professeur

Ex5 (module, préparé à la maison)

exercice 5 : *(Pythagore 2nde, 47 p 190)*

AB et DC sont deux cordes d'un même cercle sécantes en I

montrer que IB x IA = ID x IC

Groupe 1

0 min 30	Indication : méthode
1 min	Réponse d'élève et commentaires du professeur
2 min	Correction commune

Groupe 2

1 min	Figure et commentaires
7 min	Correction commune et autres méthodes

Ex6 (module, préparé à la maison)

OKN triangle rectangle en K, M appartient à [OK], H le projeté orthogonal de M sur (ON)

montrer que ON x OH = OM x OK

Groupe 1

3 min	Réponse d'élève
2 min	Commentaire du professeur, remarque sur l'écriture des homologues

Groupe 2

1 min	Réponse d'élève
3 min	Commentaire du professeur, remarque sur l'écriture des homologues

Ex7 (module, préparé à la maison)

ABC triangle rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A

a) montrer que ABC et HBA sont semblables

b) en déduire que $AB^2 = BC \times HB$

c) en déduire que $CA^2 = CB \times CH$

d) montrer que HBA et HAC sont semblables

en déduire que $HA^2 = HB \times HC$

Groupe 1

8 min	Correction par le professeur et indications de méthode
4 min	Les élèves sont sollicités pour donner d'autres méthodes

Groupe 2

8 min	Correction commune
4 min	Le professeur propose d'autres méthodes

Ex8

ABC et A'B'C' sont semblables, H (resp. H') pied de la hauteur issue de A (resp. A'), on pose B'C'/BC = k.

a) montrer que ABH et A'B'H' sont semblables

b) déterminer le rapport A'H'/AH

31 min pour les 3 ex	Recherche individuelle
5 min	Réponse d'élève et commentaire du professeur

Ex9 (terminé à la maison)

ABC et A'B'C' sont semblables, la bissectrice de CAB (resp.C'A'B') est sécante à [BC] (resp. [B'C']) en D (resp. D'). Montrer que A'D' / AD = A'B' / AB

+	Recherche individuelle éventuelle
6 min	Réponse d'élève

Ex10 (terminé à la maison)

ABC et A'B'C' sont semblables, I (resp.I') est le milieu de [BC] (resp. [B'C'])

montrer que A'I'/AI = A'B'/AB

+	Recherche individuelle éventuelle
4 min	Réponse d'élève
7 min	Commentaires et correction par le professeur

Ex11 (préparé à la maison)

A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC ; G est le point d'intersection des médianes (BB') et (CC'). *a) montrer par des considérations angulaires que GBC et GB'C' sont semblables* *b) montrer GB'/GB = GC'/GC = 1/2*

10 min	Correction par un élève

Ex12 (préparé à la maison)

E appartient au coté [BC] du triangle ABC tel que les angles ABC et CAE aient même mesure *a) montrer que ABC et AEC sont semblables* *b) montrer que AB x AC = BC x AE*

4 min	Correction par un élève

Ex13

A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC *a) rappeler le théorème des milieux* *b) montrer que ABC et A'B'C' sont semblables* *c) en déduire que l'aire de A'B'C' = ¼ de l'aire de ABC*

3 min	Recherche individuelle
3 min	Correction commune et autres méthodes

Ex14 (module, préparé à la maison)

A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon R, (AB) et (CD) se coupent en M, (MO) recoupe le cercle en E et F
a) montrer AMD et CMB sont semblables, en déduire que MA x MB = MC x MD
b) montrer que ME x MF = MO^2-OE^2
c) on pose OM = d, déduire que MA x MB ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à d^2-R^2
d) (MT) tangente en T au cercle, montrer que MA x MB = MT^2
e) utiliser l'égalité précédente pour prouver que MAT et MTB sont semblables
f) montrer que les angles ABT et ATM ont même mesure

Groupe 1

16 min	Réponse d'élève, commentaires et correction du professeur
2 min	Les élèves sont sollicités pour interpréter le résultat du d)
6 min	Indication : méthode correction par le professeur, rappels de cours
5 min	Débat avec les élèves

Groupe 2

11 min	Correction par un élève (ASI pour cet élève)
1 min	Les élèves sont sollicités pour interpréter le résultat du d)
4 min	Correction du e) par un élève (ASI pour cet élève)
2 min	Correction du f) par le professeur et commentaires

COORDONNEES ET VALEURS-TEST DES MODALITES AXES 1 A 5

MODALITES			VALEURS-TEST					COORDONNEES					
LIBELLE	EFF.	P.ABS	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	DISTO.
3 . configuration													
conf = triangles	195	195.00	-15.4	-2.0	-5.0	-1.5	1.0	-0.81	-0.10	-0.26	-0.08	0.05	1.18
conf = emboîtés	121	121.00	6.4	12.0	2.1	5.4	-4.3	0.49	0.92	0.16	0.42	-0.33	2.52
conf = cercle	110	110.00	10.9	-10.1	3.5	-3.8	3.3	0.90	-0.83	0.29	-0.32	0.27	2.87
4 . mélange ancien/nouveau													
ancien	289	289.00	12.9	-6.8	-3.1	-4.0	-1.4	0.43	-0.23	-0.10	-0.13	-0.05	0.47
pas d'ancien/indic	137	137.00	-12.9	6.8	3.1	4.0	1.4	-0.91	0.48	0.22	0.28	0.10	2.11
5 . propriétés nouvelles													
D'1 seule	123	123.00	-4.0	-12.2	3.1	-1.8	-12.8	-0.30	-0.93	0.23	-0.13	-0.97	2.46
D'1+P1	184	184.00	10.0	2.6	5.4	2.6	10.1	0.56	0.14	0.30	0.15	0.56	1.32
D'1 + P1 + P2	30	30.00	2.6	10.2	-7.2	-5.3	-10.3	0.45	1.80	-1.27	-0.93	-1.82	13.20
P1 seule ou + D1	13	13.00	-6.9	-0.6	-0.6	-9.0	8.4	-1.88	-0.15	-0.17	-2.46	2.29	31.77
P2 seule	6	6.00	-1.2	1.9	0.1	-0.9	1.0	-0.47	0.78	0.02	-0.35	0.40	70.00
P'1 ou P3 seule	42	42.00	-4.6	0.4	-12.3	8.7	6.6	-0.68	0.06	-1.80	1.27	0.97	9.14
P'1 ou P3 + P1 ou P2	28	28.00	-4.5	5.6	6.1	-0.4	-0.3	-0.82	1.02	1.12	-0.07	-0.06	4.21
9 . niveau de mise en fonctionnement													
reconnaissance mod	111	111.00	-14.5	-2.1	7.5	-0.1	-1.9	-1.19	-0.17	0.61	-0.01	-0.16	2.84
intermédiaires	212	212.00	6.4	-0.1	-13.0	-7.3	1.2	0.31	-0.01	-0.63	-0.36	0.06	1.01
étapes	83	83.00	7.3	6.0	9.0	2.0	2.1	0.72	0.59	0.88	0.19	0.21	4.13
choix	20	20.00	1.5	-6.6	-1.7	13.8	-2.8	0.33	-1.45	-0.38	3.01	-0.60	20.30
1 . titre du manuel/nom du prof													
TRANSMATH	26	26.00	-0.8	1.6	-0.3	1.6	0.9	-0.15	0.30	-0.06	0.30	0.17	15.38
PYTHAGORE	33	33.00	-0.6	-0.2	3.2	-0.4	-0.5	-0.10	-0.03	0.54	-0.07	-0.09	11.91
PYRAMIDE	25	25.00	0.8	-2.3	0.2	1.0	-1.0	0.15	-0.44	0.03	0.18	-0.20	16.04
FRACTALE	26	26.00	2.0	0.3	0.1	2.5	0.0	0.38	0.05	0.02	0.47	0.00	15.38
DECLIC	21	21.00	0.2	-2.9	-1.3	3.8	-0.1	0.05	-0.63	-0.29	0.80	-0.03	19.29
BREAL	50	50.00	1.5	2.5	-1.6	-2.4	-2.0	0.21	0.33	-0.21	-0.32	-0.27	7.52
INDICES	16	16.00	0.3	-0.2	-0.9	-1.3	0.1	0.07	-0.04	-0.21	-0.31	0.02	25.63
DIMATHEME	45	45.00	-2.4	-1.3	-1.7	-1.5	0.7	-0.33	-0.19	-0.25	-0.21	0.09	8.47
BELIN	16	16.00	-0.5	-1.0	-0.3	-1.0	-0.2	-0.12	-0.24	-0.07	-0.26	-0.05	25.63
DELAGRAVE	31	31.00	-1.3	-0.7	1.3	-0.3	-1.5	-0.23	-0.12	0.22	-0.05	-0.27	12.74
HYPERBOLE	51	51.00	-2.5	1.5	-2.3	1.0	-0.1	-0.33	0.20	-0.30	0.13	-0.02	7.35
POINT	26	26.00	3.2	-0.3	1.7	-0.8	2.1	0.61	-0.06	0.33	-0.15	0.41	15.38
Mme B.	20	20.00	-1.0	-1.7	0.5	-1.1	-0.5	-0.23	-0.37	0.12	-0.24	-0.11	20.30
Mme P.	24	24.00	1.2	1.9	1.6	-0.3	2.1	0.25	0.38	0.32	-0.07	0.41	16.75
Mme F.	16	16.00	1.2	1.5	1.2	0.3	1.2	0.28	0.37	0.29	0.06	0.30	25.63
2 . type d'exercice													
manuel	366	366.00	-0.8	-1.1	-2.1	0.8	-1.7	-0.02	-0.02	-0.04	0.01	-0.03	0.16
prof classe	31	31.00	-0.7	-0.5	1.3	-0.9	-0.4	-0.12	-0.09	0.23	-0.16	-0.06	12.74
prof maison	20	20.00	1.0	2.3	1.7	0.4	2.0	0.22	0.51	0.37	0.08	0.44	20.30
prof contrôle	9	9.00	1.8	0.1	0.1	-0.7	1.9	0.60	0.04	0.03	-0.24	0.61	46.33
6 . ancien : algèbre													
algèbre	52	52.00	2.8	1.0	0.7	-0.2	2.0	0.37	0.13	0.09	-0.02	0.27	7.19
pas d'algèbre	374	374.00	-2.8	-1.0	-0.7	0.2	-2.0	-0.05	-0.02	-0.01	0.00	-0.04	0.14
7 . ancien : géo pure													
géo pure	201	201.00	11.1	-5.7	0.1	-4.1	-2.0	0.57	-0.29	0.01	-0.21	-0.10	1.12
pas de géo pure	225	225.00	-11.1	5.7	-0.1	4.1	2.0	-0.51	0.26	-0.01	0.19	0.09	0.89
8 . ancien : géo calc													
(trig+pyth+thal)	103	103.00	1.6	0.3	-2.9	-0.4	0.0	0.14	0.02	-0.25	-0.03	0.00	3.14
pas de géo calc	323	323.00	-1.6	-0.3	2.9	0.4	0.0	-0.04	-0.01	0.08	0.01	0.00	0.32
10 . ordre des homologues													
ordre	216	216.00	-0.9	-2.4	-0.3	-4.1	1.0	-0.04	-0.11	-0.02	-0.20	0.05	0.97
désordre/pas donnés	210	210.00	0.9	2.4	0.3	4.1	-1.0	0.04	0.12	0.02	0.20	-0.05	1.03

Résumé

Ce travail porte sur la relation entre l'organisation des enseignements sur les triangles semblables par le professeur de mathématiques dans sa classe, et les apprentissages qui pourraient en découler chez ses élèves. Pour cela nous analysons dans cinq classes de seconde les résultats des élèves à un contrôle et, en comparant les exercices du contrôle avec tous ceux qui ont pu être cherchés en classe précédemment, au cours du chapitre sur les triangles semblables, nous essayons de comprendre pourquoi (et comment) ils échouent, ou réussissent, au contrôle.

Les grilles d'analyses que nous avons élaborées nous ont permis de préciser « l'offre » qui est faite aux élèves par les enseignants : ceci met en jeu les cours ainsi que les tâches proposées et les activités des élèves provoquées par les déroulements en classe. Par comparaison, cela nous a permis de tirer des conclusions sur les régularités et les variations des pratiques enseignantes sur ce chapitre.

Une étude de la notion de triangles semblables dans l'histoire des mathématiques, mais aussi dans les programmes et manuels scolaires nous a permis de mieux comprendre les choix faits par les professeurs et d'appréhender les conditions du retour de cette notion dans le programme scolaire, ainsi que sa place actuelle. Nous nous questionnons notamment sur le choix de faire enseigner cette notion sans avoir introduit les similitudes, c'est à dire en privant les élèves de la possibilité d'exhiber la transformation en jeu « entre » deux triangles semblables. Nous nous interrogeons enfin sur l'utilité éventuelle d'un logiciel de géométrie dynamique pour favoriser l'apprentissage des triangles semblables.

Mots clefs

Triangles semblables, pratiques enseignantes, tâches, activités, déroulement, contrôle